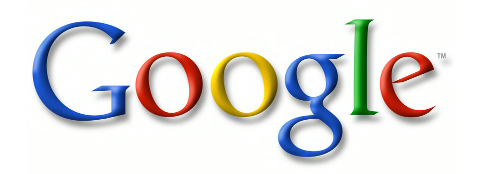








Meinem lieben Vater

gewidmet.

Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen beziehen sich nicht allein auf die Theorie der Wärme, sondern gleichzeitig auch auf die Theorie der (statischen) Elektricität. Bekanntlich existiren in diesen beiden Gebieten der Physik zwei Probleme, welche unter einander, was ihre mathematische Behandlung anbelangt, eine sehr nahe Verwandtschaft besitzen. Das eine derselben hat die

I. Bestimmung des stationären Temperaturzustandes in einem Körper, dessen Oberfläche überall mit willkührlich gegebenen und unveränderlichen Wärmequellen in Contact steht;

das andere hat die

II. Bestimmung der elektrischen Vertheilung in einem Körper, welcher sich im Bereich willkührlich gegebener und unveränderlicher elektrischer Kräfte befindet, (unter Berücksichtigung dieser Kräfte und unter gleichzeitiger Berücksichtigung derjenigen Kräfte, mit welchen die elektrischen Theilchen im Körper aufeinander wirken)

zum Gegenstande.

Im Folgenden werden diese beiden Probleme für einen Körper, der von irgend zwei einander *nicht* schneidenden Kugelflächen begrenzt ist, in voller Allgemeinheit gelöst werden. Ein solcher Körper kann je nach der Lage der beiden Kugelflächen sehr verschiedene Gestalten besitzen. Es können nämlich die beiden Flächen den Körper entweder *beide äusserlich*, oder es können ihn *beide innerlich*, oder es kann endlich die

eine ihn *äusserlich*, die *andere* ihn *innerlich* begrenzen. Im ersten Fall haben wir es dann mit einem Körper zu thun, der aus zwei getrennten Stücken, nämlich aus zwei Kugeln besteht; im zweiten Fall mit einem Körper zu thun, der in seinem Innern zwei kugelförmige Höhlungen besitzt und nach Aussen hin ringsum unbegrenzt ist; im dritten Fall endlich mit einem Körper, der eine schalenförmige Gestalt besitzt.

Durch die vorliegende Untersuchung wird das I. Problem für diese drei Fälle vollständig gelöst werden.

Was ferner das II. Problem anbelangt, so ist dasselbe für den *ersten* der in Rede stehenden drei Fälle bekanntlich schon von *Poisson* behandelt, von *Poisson* aber nur unter der besonderen Voraussetzung gelöst worden, dass die gegebenen elektrischen Kräfte *Null* sind. Die vorliegende Untersuchung geht weiter. Obgleich sich dieselbe nämlich eigentlich nur auf das Problem I. bezieht, so bieten die darin enthaltenen Entwickelungen doch die Mittel dar, um auch das II Problem für *jeden* der genannten drei Fälle und für *beliebig* gegebene elektrische Kräfte zu lösen.

Im Wesentlichen handelt es sich bei Lösung der Probleme I. und II. für irgend einen der in Rede stehenden drei Fälle um ein und dieselbe Aufgabe, nämlich um die Ermittelung einer von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängenden Function V, welche innerhalb eines von zwei Kugelflächen begrenzten Raumes allenthalben der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet, welche ausserdem innerhalb dieses Raumes gewisse Stetigkeits-Bedingungen erfüllt, welche ferner, falls der genannte Raum sich ns Unendliche hin erstreckt, für die unendlich fernen Puncte auf gewisse Weise *) gegen Null convergirt, und welche endlich auf jenen Kugelflächen selber beliebig gegebene Werthe besitzt.

*) Für einen unendlich fernen Punct muss der Werth von V gegen $\frac{x}{r}$ convergiren, wo r den Abstand jenes Punctes von irgend einem festen Punct in der Endlichkeit und x irgend welche Constante vorstellt.

Ich wende, um diese Aufgabe zu lösen, als Coordinaten die Parameter dreier orthogonaler Flächensysteme an, über deren Beschaffenheit hier Folgendes bemerkt werden mag.

Construirt man alle Puncte, deren Abstände nach zwei festen Puncten hin ein gegebenes Verhältniss besitzen, so werden diese Puncte in ihrer Gesammtheit eine Kugelfläche bilden. Aendert man den Werth jenes Verhältnisses, so wird man successive andere und andere Kugelflächen erhalten; und zwar werden die Mittelpuncte aller dieser Flächen mit jenen beiden festen Puncten in ein und derselben geraden Linie liegen. Dieses ist das *erste* der von mir angewendeten drei Flächensysteme. Den beiden festen Puncten — ich nenne sie die beiden *Pole* — gebe ich dabei in jedem speciellen Falle eine solche Lage, dass die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Körpers mit zu den Kugelflächen dieses Systemes gehören.

Construirt man ferner alle Puncte, von welchen aus gesehen die Pole gleich weit von einander entfernt erscheinen, so erhält man Puncte, die in ihrer Gesammtheit eine gewisse Rotationsfläche bilden.*) Aendert man die Grösse jener scheinbaren Entfernung, so erhält man successive andere und andere Rotationsflächen. Diese Flächen, deren gemeinsame Rotations-Achse durch die Verbindungslinie der beiden Pole dargestellt wird, sind zu den vorher genannten Kugelflächen orthogonal, und bilden in ihrer Gesammtheit das *zweite* der von mir angewendeten Flächensysteme.

Das *dritte* Flächensystem endlich wird durch die Meridian-Ebenen der beiden ersten Flächensysteme, d. i. durch Ebenen repräsentirt, welche sämmtlich durch die beiden Pole hindurchgehen.

Sind die beiden den Körper begrenzenden Kugelflächen gegeben, so lassen sich die beiden Pole sofort construiren**); sind diese aber con-

---

*) Es wird diese Fläche eine Kugel sein, sobald der Winkel, unter welchem man nach den beiden Polen sieht, gerade ein rechter ist. Ist hingegen dieser Winkel ein spitzer oder ein stumpfer, so wird jene Fläche eine Rotationsfläche sein, welche in jedem der beiden Pole eine *Spitze* besitzt.

**) Man braucht zu diesem Zweck nur in irgend einer Meridianebene einen Kreis zu construiren, welcher die beiden Kugelflächen senkrecht durchschneidet. Die beiden Puncte, in welchen dieser Kreis und die Verbindungs-

struirt, so ist damit die Lage der drei Flächensysteme überhaupt vollständig bestimmt.

Die Parameter dieser drei Flächensysteme sind es also, deren ich mich bei meiner Untersuchung als Coordinaten bedienen werde. Man könnte dieselben, falls ein Name erwünscht erscheinen sollte, die „*dipolaren Coordinaten*" nennen.

Einen besonders einfachen Charakter gewinnt die Beschaffenheit unserer drei Flächensysteme, sobald die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Körpers *concentrisch* sind. Alsdann nämlich fällt der eine Pol in den gemeinsamen Mittelpunct dieser beiden Flächen, der andere Pol in die Unendlichkeit und dem entsprechend verwandelt sich dann von jenen drei Flächensystemen das erste in ein System concentrischer Kugeln, das zweite in ein System von Rotationskegeln und das dritte in die Meridianebenen dieser Kegel. Man übersieht daher sofort, dass die Parameter der drei Flächensysteme sich in diesem Specialfall in die gewöhnlichen Polar-Coordinaten verwandeln werden. Wollte man also, wie es wohl zweckmässig sein dürfte, die dipolaren Coordinaten für diesen Specialfall mit dem Namen „*monopolare Coordinaten*" bezeichnen, so würden die monopolaren Coordinaten identisch sein mit den *gewöhnlichen Polar-Coordinaten*.

Ausserdem ist noch ein anderer Specialfall zu erwähnen, der dann eintritt, wenn die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Körpers einander gerade *berühren*. Findet dieses statt, so fallen die beiden Pole in *einen* Punct zusammen und zwar in den Contactpunct jener beiden Flächen. Man könnte in diesem Specialfall die dipolaren Coordinaten mit dem Namen „*synpolare Coordinaten*" bezeichnen.

In meiner Abhandlung selber habe ich den Gebrauch der eben angegebenen Bezeichnungen „dipolar, monopolar, synpolar" vermieden; hier in der Einleitung dagegen (und ebenso auch in der Inhaltsangabe) werde ich, um an Kürze zu gewinnen, an diesen Bezeichnungen festhalten.

Zur Lösung der Aufgabe, um welche es sich handelt, nämlich zur Bestimmung der vorhin genannten Function V ist es vor allen Dingen

---

linie der beiden Kugelmittelpuncte einander schneiden, sind dann die beiden Pole.

erforderlich, dass man den Ausdruck, in welchen sich der reciproke Werth der Entfernung zweier Puncte bei Einführung der neuen Coordinaten verwandelt, in eine Reihe zu entwickeln im Stande ist, bei welcher jedes einzelne Glied Y der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet.

Für die *monopolaren* Coordinaten ist diese Entwickelung bekanntlich bereits von *Laplace* ausgeführt worden, und zwar mit Benutzung einer Function $\overset{(n)}{P}(\eta)$, welche der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial . (1-\eta^2) \frac{\partial \overset{(n)}{P} \eta}{\partial \eta}}{\partial \eta} + n(n+1) \overset{(n)}{P}(\eta) = 0$$

Genüge leistet.

Was nun die *dipolaren* Coordinaten anbelangt, so führt meine Untersuchung zu dem merkwürdigen Resultat, dass bei Anwendung dieser die Entwickelung jener reciproken Entfernung mit der eben erwähnten Laplace'schen Entwickelung der *Form* nach identisch wird; nämlich zu dem Resultat, dass es im Wesentlichen nur der Vertauschung der monopolaren mit den dipolaren Coordinaten bedarf, um die eine Entwickelung in die andere umzuwandeln. *)

Wesentlich anders gestaltet sich die Sache hingegen bei Anwendung der *synpolaren* Coordinaten. Geht man nämlich von dem allgemeinen Fall der dipolaren Coordinaten zu dem Specialfall der synpolaren Coordinaten über, so tritt bei Ausführung jener Entwickelung an Stelle der *Laplace*'schen Function $\overset{(n)}{P}(\eta)$ eine gewisse andere bereits von *Fourier* und später von *Bessel* benutzte Function, welche ich mit $J(n\eta)$ bezeichne und welche der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 J(n\eta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial J(n\eta)}{\partial \eta} + n^2 J(n\eta) = 0$$

Genüge leistet. Und gleichzeitig mit dieser Umänderung verwandelt sich

---

*) Man findet die Entwickelung der reciproken Entfernung mit Hülfe der dipolaren Coordinaten $\vartheta, \omega, \varphi$ in No. 96, pag. 90 und auch in der Randbemerkung pag. 91 angegeben.

ausserdem die *Reihe*, durch welche jene Entwickelung dargestellt wird, in ein *bestimmtes Integral.* *)

Ist der reciproke Werth der Entfernung zweier Puncte in der hier angedeuteten Art dargestellt, so lässt sich dann die Function V leicht ermitteln.

In Betreff der synpolaren Coordinaten mag noch bemerkt werden, dass die darüber von mir angestellte Untersuchung beiläufig zu einem Resultat führt, welches für die Theorie der Functionen im Allgemeinen nicht ohne Interesse ist. Im Verlaufe der Untersuchung ergiebt sich nämlich, dass jede willkührlich gegebene, von *zwei* Argumenten abhängende Function durch ein gewisses *drei*faches Integral dargestellt werden kann; dass also für die eben genannten Functionen eine Darstellung existirt, welche dem *Fourier*'schen *zwei*fachen Integrale für eine Function *eines* Argumentes vollständig analog ist.

Von den zu Anfang genannten Problemen I. und II. wird in der vorliegenden Arbeit das Wärme-Problem ausführlich behandelt, auf das Elektricitäts-Problem aber nicht näher eingegangen werden. Es wird daher zweckmässig sein, wenigstens hier in der Einleitung kurz anzudeuten, wie man auch das letztere Problem mit Hülfe der in der vorliegenden Abhandlung gegebenen Entwickelungen zu lösen im Stande ist.

Der Einfachheit willen beschränke ich mich dabei auf den Fall, dass der Körper aus zwei getrennten (oder auch einander berührenden) Kugeln besteht. Jede dieser beiden Kugeln ist mit einem gegebenen Quantum Elektricität geladen. Es handelt sich darum, die Vertheilung zu ermitteln, welche diese Elektricitätsmengen auf den Oberflächen der beiden Kugeln unter ihrem gegenseitigen Einfluss sowie unter dem Einfluss gegebener unveränderlicher Kräfte annehmen. Ich beginne damit, dass ich zuerst das Potential derjenigen Einwirkung berechne, welche nach Eintritt der eben erwähnten Gleichgewichtslage die auf *beiden* Kugelflächen vorhandenen elektrischen Belegungen zusammengenommen auf beliebige Puncte des Raumes ausüben. Der Werth dieses Potentiales

*) Man findet diese Darstellung der reciproken Entfernung durch ein bestimmtes Integral unter Anwendung der synpolaren Coordinaten λ, ϑ, φ in No. 140, pag. 118 angegeben.

wird für *jeden* der drei Räume, in welchen der ganze unendliche Raum durch jene zwei Kugelflächen zerlegt wird, durch eine *andere* Function dargestellt werden. Der Werth des Potentiales für den Raum ausserhalb beider Kugeln mag mit V, der Werth desselben für den Raum innerhalb der einen Kugel mit F, und der Werth desselben für den Raum innerhalb der andern mit Φ bezeichnet werden. Für das Potential V ergeben sich nun zunächst folgende Bedingungen. Bezeichnet P das Potential der gegebenen und unveränderlichen Kräfte, welche auf die Kugeln einwirken, so muss V eine stetige Function sein, welche in dem Raume ausserhalb der beiden Kugeln allenthalben der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet, welche ferner für die unendlich fernen Puncte dieses Raumes auf gewisse*) Weise gegen Null convergirt, und welche endlich an der Oberfläche der einen Kugel der Relation $V + P = C$, an der Oberfläche der andern Kugel der Relation $V + P = \Gamma$ Genüge leistet, wo C und Γ vor der Hand noch willkührliche Constanten vorstellen. Diese Bedingungen sind zur Bestimmung von V vollständig ausreichend. Und zwar kann man vermittelst der in meiner Abhandlung gegebenen Formeln den Werth von V sofort hinstellen.**) Was ferner F anbelangt, so ist F eine stetige Function, welche innerhalb der ersten Kugel allenthalben der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

genügen, und ausserdem an der Oberfläche dieser Kugel die Relation $F + P = C$ erfüllen muss. Analoge Bedingungen ergeben sich mit Bezug auf die zweite Kugel für Φ. Man sieht daher sofort, dass die Bestimmung dieser Functionen F und Φ keine Schwierigkeiten darbietet, dass nämlich die Werthe derselben vermittelst der bekannten *Laplace*'-

---

*) Für einen unendlich fernen Punct muss der Werth von V gegen $\frac{x}{r}$ convergiren, wenn r den Abstand jenes Punctes von irgend einem festen Puncte in der Endlichkeit und x eine beliebige Constante vorstellt.

**) Berühren die beiden Kugeln einander *nicht*, so lässt sich solches mit Hülfe der Formeln pag. 110, No. 133; findet zwischen ihnen Berührung statt, mit Hülfe der Formeln pag. 145, No. 174 bewerkstelligen.

schen Entwickelungen sofort berechnet werden können. Jedoch sind auch hiebei die *neuen* Entwickelungen, welche ich in meiner Abhandlung gebe, nicht ohne Nutzen. Wollte man nämlich der *Laplace*'schen Methode folgen, so würde man bei Berechnung von F und Φ *verschiedene* Coordinatensysteme zu Grunde legen müssen, indem man einmal den Mittelpunct der einen, das andere Mal den der andern Kugel zum Anfangspunct nehmen müsste. Wendet man dagegen die Methoden*) an, welche in der vorliegenden Abhandlung dargelegt werden, so kann man sich bei Bestimmung von F und Φ *ein und desselben* Coordinatensystemes, und zwar *ebendesselben* Coordinatensystemes bedienen, welches bereits bei Berechnung des zuvor besprochenen Potentiales V angewendet werden muss; so dass man also alle drei Potentiale V, F und Φ unmitelbar als Functionen *ein und derselben* Coordinaten**) darstellen kann. Sind V, F, Φ berechnet, so kann man dann bekanntlich die Dichtigkeiten der gesuchten elektrischen Belegungen der beiden Kugelflächen leicht durch gewisse Differential-Quotienten dieser Potentiale darstellen. Bezeichnet man nämlich jene Dichtigkeiten bei den beiden Kugeln respective mit E und H, so ist:

$$4\pi E = \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$4\pi H = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - \frac{\partial V}{\partial \varrho},$$

wo r den Radius der einen, ϱ den der andern Kugel vorstellt. Endlich werden dann die in diesen Ausdrücken für E und H noch enthaltenen willkührlichen Constanten C und Γ leicht der Art bestimmt werden können, dass die auf jeder Kugel enthaltene Elektricitätsmenge den für dieselbe gegebenen Werth besitzt.

Meine Methode zur Lösung des in Rede stehenden Elektricitätsproblemes ist also, wie man sieht, nicht nur allgemeiner als die von *Poisson* gegebene, sondern auch viel directer und einfacher als jene.

---

*) In Bezug hierauf verweise ich, falls die Kugeln einander *nicht* berühren, auf die Bemerkung pag. 112; und, falls Berührung stattfindet, auf pag. 148. No. 175.

**) Es sind dies, falls die beiden Kugeln einander nicht berühren, die *dipolaren*, und falls sie einander berühren, die *synpolaren* Coordinaten.

Inhalt.

Zweiter Abschnitt.

Analytische Methode zur Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand.

Um die einfach fortschreitende Entwickelung meiner nachfolgenden Untersuchungen möglichst klar hervortreten zu lassen, wird es zweckmässig sein, hier gleich zu Anfang zweier Functionen zu erwähnen, welche im Nachfolgenden eine Rolle von durchgreifender Wichtigkeit spielen; und in Bezug auf die Natur und die Eigenschaften dieser Functionen dasjenige kurz zusammenzustellen, was zum ungestörten Fortgang meiner Untersuchungen erforderlich ist.

Die Laplace'sche Function $\overset{(n)}{P}(x)$. Entwickelt man den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1{}^2-2rr_1x}}$ unter der Voraussetzung, dass $r<r_1$ ist, nach Potenzen von r, so ergiebt sich eine ins Unendliche fortschreitende Reihe von folgender Form:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1{}^2-2rr_1x}}=\frac{1}{r_1}X_0+\frac{r}{r_1{}^2}X_1+\frac{r^2}{r_1{}^3}X_2+\ldots$$

wo die X allein von x abhängen. Diese Functionen X, welche in der Analysis zuerst bei einer Arbeit von Legendre „Sur l'attraction des Sphéroïdes" hervortraten *), welche sodann durch die Untersuchungen von Laplace in seiner „Mécanique céléste" einen weit ausgedehnten Wirkungskreis erhielten, und welche gegenwärtig unter dem Namen „Laplace'sche Functionen" in den meisten Gebieten der mathematischen Physik eine hervorragende Wichtigkeit erlangt haben, werden auch für die hier vorliegende Untersuchung unentbehrlich sein. Bezeichnen wir die bei obiger Entwicklung mit $\frac{r^n}{r_1{}^{n+1}}$ multiplicirte Laplace'sche Function X_n — nach dem Vorgange von Dirichlet — mit $\overset{(n)}{P}(x)$, so lautet jene, zur Definition dieser Functionen verwendete, Entwickelung folgendermassen:

---

*) Man sehe darüber Heine's Handbuch der Kugelfunctionen, Einleitung. Pag. V.

$$(1.)\qquad \frac{1}{\sqrt{r^2+r_1{}^2-2rr_1x}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{r^n}{r_1{}^{n+1}}\cdot\overset{(n)}{P}(x),$$

oder, falls wir auf beiden Seiten mit $\sqrt{r}\sqrt{r_1}$ multipliciren:

$$(1.\text{a.})\qquad \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{r_1}+\frac{r_1}{r}-2x}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\cdot\overset{(n)}{P}(x).$$

Aus der Formel (1.) ergiebt sich, wenn man die Entwickelung der links stehenden reciprocen Wurzelgrösse nach Potenzen von r wirklich ausführt, als Werth von $\overset{(n)}{P}(x)$ folgende ganze Function $n$ten Grades*):

(2.)

$$\overset{(n)}{P}(x)=\frac{1.3.5\ldots2n-1}{1.2.3\ldots n}\left(x^n-\frac{n.n-1}{2.2n-1}x^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}x^{n-4}-+\ldots\right)$$

Andererseits lässt sich aus derselben Formel (1.), wie Heine auf sehr einfache Weise**) gezeigt hat, der Werth von $\overset{(n)}{P}(x)$ auch in Form eines bestimmten Integrals erhalten, nämlich:

$$(2.\text{a.})\qquad \overset{(n)}{P}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x+\sqrt{x^2-1}\cos\alpha)^n d\alpha.$$

Und hieraus ergiebt sich, wenn man $\cos x$ statt x setzt, für die Function $\overset{(n)}{P}(\cos x)$ sofort folgender Satz:

(2. b.) *Die Werthe der Functionen*

$$\overset{(n)}{P}(\cos x),\quad \frac{d\overset{(n)}{P}(\cos x)}{dx},\quad \frac{d^2\overset{(n)}{P}(\cos x)}{dx^2},\ \text{etc. etc.}$$

bleiben, so lange sich das (reell vorausgesetzte) Argument x zwischen den Grenzen -1 ***und*** $+1$ ***bewegt, nicht allein fortwährend stetig, sondern auch beständig zwischen den Grenzen*** -1 ***und*** $+1$.

Hiermit sind alle diejenigen Eigenschaften der Laplace'schen Function angegeben, welche auf den Fortgang meiner nachfolgenden Untersuchungen influiren. Noch andere Eigenschaften dieser Functionen werden allerdings später ebenfalls zur Sprache kommen, werden aber unmittelbar im Hauptzuge meiner Deductionen von selber zu Tage treten, und bedürfen daher hier keiner abgesonderten Auseinandersetzung.

---

*) Heine. l. c. Pag. 6.

**) Heine. l. c. Pag. 14.

Die Bessel'sche Function J(x). Schon Fourier wurde bei seinen Untersuchungen über die „Théorie analytique de la chaleur" veranlasst, auf die Natur einer Function $J(x)$ näher einzugehen*), welche der Differential-Gleichung

$$(3.)\qquad \frac{d^2J(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ(x)}{dx} + J(x) = 0$$

oder, was dasselbe ist, der Differential-Gleichung

$$(3.\text{a}.)\qquad \frac{d^2[\sqrt{x}.J(x)]}{dx^2} + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right).\sqrt{x}.J(x) = 0$$

und gleichzeitig den Anfangs-Bedingungen

$$(3.\text{b}.)\qquad J(0) = 1. \qquad \left(\frac{dJ(x)}{dx}\right)_{x=0} = 0$$

Genüge leistet. In ausgedehnterem Maassstabe wurde diese Function später von Poisson, dann aber namentlich von Bessel untersucht und angewendet. Ich werde dieselbe daher — nach dem Vorgange von Lipschitz — die „*Bessel'sche* Function" nennen. Für den Werth dieser Function fand bereits Fourier zwei Darstellungen, die eine in Form der für jeden Werth von x convergirenden unendlichen Reihe:

$$(4.)\qquad J(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2.4}\right)^2 - \left(\frac{x^3}{2.4.6}\right)^2 + - \ldots,$$

die andere in Form des bestimmten Integrales

$$(4.\text{a}.)\qquad J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\alpha}\,d\alpha, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Aus letzterer ergiebt sich sofort folgender Satz:

(4.b.) *Die Werthe der Functionen*

$$J(x),\quad \frac{dJ(x)}{dx},\quad \frac{d^2J(x)}{dx^2},\quad \text{etc. etc.}$$

bleiben, welche Grösse das (reell vorausgesetzte) Argument x auch immer annehmen mag, fortwährend stetig und beständig zwischen den Grenzen −1 und +1.

*) Fourier. Théorie analytique de la chaleur. Pag. 369.

Um die Werthe dieser Functionen für ein äusserst grosses x zu beurtheilen, ist es zweckmässig, auf die Differentialgleichung (3. a.) zurückzugehen. Diese verwandelt sich alsdann nahezu in

$$(\alpha.)\qquad \frac{d^2[\sqrt{x}.J(x)]}{dx^2} + \sqrt{x}.J(x) = 0,$$

und wird daher zwei particuläre Integrale besitzen, welche für ein sehr grosses x nahezu durch $\sqrt{x}\,J(x) = \sin x$ und $\sqrt{x}\,J(x) = \cos x$ ausgedrückt werden. Die Function $J(x)$ wird demnach einen Werth besitzen, welcher sich für ein sehr grosses x nahezu in

$$(\beta.)\qquad J(x) = \frac{A\sin x + B\cos x}{\sqrt{x}}$$

verwandelt, wo A und B noch unbekannte Constanten vorstellen. Zu einem ganz analogen Resultat gelangt man in Bezug auf die Function $J'(x) = \frac{dJ(x)}{dx}$. Die für diese durch Differentiation von (3.) sich ergebende Gleichung

$$\frac{d^2J'(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ'(x)}{dx} + \left(1-\frac{1}{x^2}\right)J'(x) = 0$$

kann nämlich in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d^2[\sqrt{x}\,J'(x)]}{dx^2} + \left(1-\frac{3}{4x^2}\right).\sqrt{x}\,J'(x) = 0,$$

und verwandelt sich daher für äusserst grosse Werthe von x nahezu in

$$(\gamma.)\qquad \frac{d^2[\sqrt{x}\,J'(x)]}{dx^2} + \sqrt{x}\,J'(x) = 0.$$

Diese mit (α.) vollständig ähnliche Gleichung zeigt, dass die Function $J'(x)$ für ein sehr grosses x einen Werth annehmen wird, der dem zuvor für $J(x)$ selber gefundenen vollständig analog ist, dass nämlich, falls x äusserst gross ist, nahezu

$$(\delta.)\qquad J'(x) = \frac{A'\sin x + B'\cos x}{\sqrt{x}}$$

werden wird, wo A' und B' wiederum noch unbekannte Constante vorstellen. Aus (β.) und (δ.) folgt nunmehr sofort, dass $J(x)$ und $\frac{dJ(x)}{dx}$ gegen Null convergiren, sobald x ins Unendliche anwächst. Hieraus aber ergiebt sich, dass Gleiches auch bei den Functionen $\frac{d^2J(x)}{dx^2}$, $\frac{d^3J(x)}{dx^3}$,

etc. etc. der Fall sein wird, wie man sofort erkennt, wenn man beachtet, dass zufolge (3.) der zweite Differential-Quotient $\frac{d^2 J(x)}{dx^2}$ eine lineäre Function von $J(x)$ und $\frac{dJ(x)}{dx}$ ist, dass ferner zufolge der aus (3.) durch Differentiation nach x entspringenden Gleichung der dritte Differential-Quotient $\frac{d^3 J(x)}{dx^3}$ sich als eine lineare Function von $J(x)$, $\frac{dJ(x)}{dx}$ und $\frac{d^2 J(x)}{dx^2}$ darstellt, u. s. w. Also:

(4. c.) *Die Werthe der Functionen*

$$J(x),\ \frac{dJ(x)}{dx},\ \frac{d^2 J(x)}{dx^2},\ \text{etc. etc.}$$

convergiren, wenn x ins Unendliche anwächst, gegen Null.

Ausser den bisher über die Function $J(x)$ erhaltenen Resultaten ist endlich für meine nachfolgenden Untersuchungen noch die Feststellung folgendes Satzes erforderlich:

(5.) ***Besitzt eine Function $f(x)$ sowohl für $x = x_0$ als auch für $x = \infty$ bestimmte endliche Werthe, und ist dieselbe, während x von x_0 bis ∞ fortschreitet, entweder ohne Unterbrechung im Abnehmen oder ohne Unterbrechung im Zunehmen begriffen, so hat das Integral***

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x) \,.\, J(x)\, dx$$

einen festen endlichen Werth.

Um diesen Satz zu beweisen, werde ich eine von Poisson *) angestellte und von Lipschitz **) vervollständigte Untersuchung über die Function $J(x)$ zu Hülfe ziehen. Poisson substituirte, um die Gleichung (3.) zu integriren, in derselben für $J(x)$ folgenden Ausdruck:

$$(\alpha.) \qquad J(x) = \frac{\varphi(x)\sin x + \psi(x)\cos x}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$$

und fand, dass sowohl jener Differentialgleichung als auch den Anfangsbedingungen (3. b.) genügt wird, wenn man für $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ folgende semi-convergente Reihen nimmt:

---

*) Journal de l'école polytechnique. Cahier XIX. Pag. 349.

**) Borchardt. Journal f. Math. LXI. Pag. 189.

$$\varphi(x) = 1 + \frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2} - \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{A_5}{x^5} - - + + \dots$$

$$\psi(x) = 1 - \frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} - - + + \dots$$

wo A_1, A_2, A_3 ... die Zahlen

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2.4}\left(\frac{1.3}{2.2}\right)^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2.4.6}\left(\frac{1.3.5}{2.2.2}\right)^2$$

etc. etc.

vorstellen. Diese semiconvergenten Reihen oder vielmehr die einfacheren Reihen, welche sich aus jenen für die Summe $\varphi(x) + \psi(x)$ und die Differenz $\varphi(x) - \psi(x)$ ergeben:

$$\frac{\varphi(x) + \psi(x)}{2} = 1 - \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_4}{x^4} - \frac{A_6}{x^6} + - \dots$$

$$\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{2} = \frac{A_1}{x} - \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_5}{x^5} - \frac{A_7}{x^7} + - \dots$$

wurden von Lipschitz genauer untersucht. Derselbe gelangte zu dem Resultat, dass bei Anwendung dieser Reihen der bei Summation der ersten n Glieder und Fortlassung der übrigen entstehende Fehler immer kleiner als das $(n+1)$te Glied ist. Versteht man daher unter $\vartheta = \vartheta(x)$ und $\Theta = \Theta(x)$ zwei unbekannte Functionen, welche für alle Werthe von x zwischen den Grenzen -1 und $+1$ bleiben, so kann man

$$\frac{\varphi(x) + \psi(x)}{2} = 1 - \frac{\vartheta A_2}{x^2}$$

$$\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{2} = \frac{\Theta A_1}{x},$$

mithin

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\Theta A_1}{x} - \frac{\vartheta A_2}{x^2}$$

$$\psi(x) = 1 - \frac{\Theta A_1}{x} - \frac{\vartheta A_2}{x^2}$$

setzen. Dadurch ergiebt sich dann für die Bessel'sche Function $J(x)$, zufolge $(\alpha.)$, folgende Darstellung:

$$(\beta.) \qquad J(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\Theta A_1}{x\sqrt{x}} - \frac{\vartheta A_2}{x^2\sqrt{x}}\right)\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\Theta A_1}{x\sqrt{x}} - \frac{\vartheta A_2}{x^2\sqrt{x}}\right)\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}.$$

Mit Hülfe dieser Formel wird es nun möglich sein, den Satz (5.) in voller Strenge zu beweisen. Zuvörderst mag bemerkt werden, dass der Werth des Integrales, um dessen Untersuchung es sich dabei handelt, offenbar ein endlicher sein wird, falls man die Integration nicht von x_0 bis ∞, sondern von x_0 bis zu einem beliebigen endlichen zwischen x_0 und ∞ gelegenem Werthe p ausdehnt. Solches ergiebt sich nämlich sofort, wenn man beachtet, dass die unter dem Integrale befindliche Function $f(x)$ den in (5.) gemachten Voraussetzungen zufolge innerhalb des Intervalles x_0 bis ∞ überall endlich ist, und ferner beachtet, dass die andere unter dem Integrale stehende Function $J(x)$ zufolge (4. b.) durchweg endlich bleibt, welchen Werth das Argument x auch immer annehmen mag. Denkt man sich daher das in (5.) angegebene Integral in zwei Theile zerlegt, von denen der eine die von x_0 bis p, der andere die von p bis ∞ fortgehende Integration umfasst, so wird der Satz (5.) in voller Allgemeinheit bewiesen sein, sobald dargethan ist, dass

$$(\gamma.) \qquad \int_p^\infty f(x)\, J(x)\, dx$$

einen bestimmten endlichen Werth besitzt. Wir erlangen dadurch den Vortheil, dass wir an Stelle der ursprünglich gegebenen, möglicherweise negativen, unteren Grenze x_0 es nun mit einer unteren Grenze p zu thun haben, die wir zwischen x_0 und ∞ beliebig wählen, die wir also — was in der That geschehen mag — immer positiv voraussetzen können. Durch Substitution des Werthes (β.) verwandelt sich dieses Integral (γ.) in

$$(\delta.) \qquad \int_p^\infty f(x)\, J(x)\, dx = \sum \int_p^\infty \frac{f(x)\,.\,U}{x\sqrt{x}}\, dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_p^\infty \frac{f(x)\,.\,\sin x}{\sqrt{x}}\, dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_p^\infty \frac{f(x)\,.\,\cos x}{\sqrt{x}}\, dx,$$

wo das in erster Zeile stehende Zeichen Σ eine Summe von 4 Integralen andeuten soll, die von einander durch verschiedene Werthe von U differiren, in welchen nämlich U der Reihe nach folgende Bedeutungen hat:

$$(\varepsilon.) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1)\ U = \dfrac{A_1}{\sqrt{\pi}}\,.\,\Theta \sin x. & 2)\ U = -\dfrac{A_1}{\sqrt{\pi}}\,.\,\Theta \cos x. \\ 3)\ U = -\dfrac{A_2}{\sqrt{\pi}}\,\dfrac{\vartheta \sin x}{x}. & 4)\ U = -\dfrac{A_2}{\sqrt{\pi}}\,.\,\dfrac{\vartheta \cos x}{x}. \end{array} \right.$$

Um nun nachzuweisen, dass das Integral (γ.) oder (δ.) einen bestimmten endlichen Werth besitzt, werde ich die in (δ.) auf der rechten Seite stehenden Integrale einzeln untersuchen; und zwar successive zunächst die Integrale, welche dort in erster Zeile stehen, sodann das in zweiter Zeile, endlich das in dritter Zeile befindliche Integral näher in Betrachtung ziehen.

Irgend eines unter den 4 Integralen erster Zeile (in δ.) hat die Form

$$(\zeta.)\qquad \int_p^\infty \frac{f(x)\,.\,U}{x\sqrt{x}}\,dx\,,$$

wo U eine der in (ε.) angegebenen Functionen vorstellt. Beachtet man, dass p positiv ist, dass also innerhalb des Integrations-Intervalles $p\ldots\infty$ der Werth $x=0$ nicht enthalten ist, und beachtet man ausserdem, dass A_1, A_2 unveränderliche Zahlen sind, ferner $\vartheta=\vartheta(x)$, $\Theta=\Theta(x)$ Functionen vorstellen, die fortwährend zwischen -1 und $+1$ bleiben; so ergiebt sich aus (ε.) sofort, dass die Function U innerhalb des Integrations-Intervalles $p\ldots\infty$ durchweg endlich bleibt. Da ferner (zufolge 5.) von $f(x)$ dasselbe gilt, so werden sich immer zwei endliche Grenzen A und B angeben lassen, zwischen welchen der Werth des Productes $f(x)\,.\,U$ eingeschlossen bleibt, während x von p bis ∞ fortgeht. Demnach ergiebt sich;

$$A\int_p^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} < \int_p^\infty \frac{f(x)\,U\,dx}{x\sqrt{x}} < B\int_p^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

d. i.

$$\frac{2A}{\sqrt{p}} < \int_p^\infty \frac{f(x)\,U}{x\sqrt{x}}\,dx < \frac{2B}{\sqrt{p}}\,.$$

Damit aber ist bewiesen, dass das Integral (ζ.) einen endlichen Werth besitzen muss. Dass derselbe ein vollständig bestimmter sein muss, unterliegt ebenfalls keinem Zweifel, da der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck für $x=\infty$ verschwindet.

Was das Integral zweiter Zeile (in δ.) anbelangt, so müssen wir, um dieses zu untersuchen, zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die in (5.) definirte Function $f(x)$ auf dem Wege von x_0 bis ∞, also auch auf dem Wege von p bis ∞, beständig im Abnehmen oder beständig im Zunehmen begriffen ist. Wir bezeichnen die Function $f(x)$ im ersten Fälle mit $\alpha(x)$, im zweiten mit $\zeta(x)$, und untersuchen successive zuerst die Integrale

$$(\eta.)\qquad \int_p^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \quad\text{und}\quad \int_p^\infty \frac{\alpha(x)\,.\,\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

darauf das Integral

$$(\vartheta.) \qquad \int_p^\infty \frac{\zeta(x)\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Für p können wir dabei einen Werth nehmen, der irgendwo innerhalb des ursprünglich gegebenen Intervalles $x_0 \ldots \infty$ liegt. Es ist hier zweckmässig, p so gross zu wählen, dass jede der Functionen $\alpha(x)$ und $\zeta(x)$ auf dem Wege $x = p$ bis $x = \infty$ fortwährend einerlei Vorzeichen behält; was, zufolge der in (5.) über $f(x)$ gemachten und auf $\alpha(x)$ und $\zeta(x)$ sich übertragenden Voraussetzungen, immer möglich sein wird. Gleichzeitig mag dabei p so gewählt werden, dass dasselbe $= n\pi$ d. h. gleich einem ganzen Vielfachen von π wird. Jedes der beiden Integrale $(\eta.)$ kann nun dadurch, dass man das von $x = p = n\pi$ bis $x = \infty$ gehende Integrations-Intervall in einzelne Elementar-Intervalle jedes von der Länge π zerlegt, in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Sin x wird dann von einem Elementar-Intervall zum andern hin sein Vorzeichen wechseln, während $\sqrt{x}$ und, der für p getroffenen Wahl zufolge, auch $\alpha(x)$ durchweg einerlei Vorzeichen behalten. Die in Rede stehende Reihe wird daher, mag es sich nun um das eine oder das andere der beiden Integrale $(\eta.)$ handeln, aus Gliedern bestehen, die abwechselnd positiv und negativ sind. Da ferner die Function $\frac{1}{\sqrt{x}}$ und ebenso, zufolge der über $\alpha(x)$ gemachten Voraussetzungen, auch die Function $\frac{\alpha(x)}{\sqrt{x}}$ auf dem Wege $x = p$ bis $x = \infty$ unaufhörlich im Abnehmen begriffen ist und beide für $x = \infty$ verschwinden, so wird, wie man leicht übersieht, das allgemeine Glied der in Rede stehenden Reihe mit wachsender Stellenzahl seinem absoluten Werthe nach fortwährend kleiner und kleiner werden, und gegen Null convergiren, sobald die Stellenzahl ins Unendliche anwächst. Da nun bekanntlich eine Reihe, welche die eben erwähnten Eigenschaften besitzt (d. i. eine Reihe mit Gliedern von alternirendem Vorzeichen, die ihrem absoluten Werthe nach von Anfang der Reihe nach dem Ende derselben hin fortwährend kleiner und kleiner und zuletzt Null werden) immer convergent ist, so haben die durch eine Reihe solcher Art dargestellten Integrale $(\eta.)$ einen festen endlichen Werth.

Um ferner das Integral $(\vartheta.)$ zu untersuchen, bezeichnen wir den Werth, welchen die daselbst vorhandene Function $\zeta(x)$ für $x = \infty$ annimmt, mit C. Dann wird die Differenz $C - \zeta(x)$ eine Function von x sein, welche auf dem Wege $x = p$ bis $x = \infty$ fortwährend im Abnehmen begriffen ist, also eine Function sein, welche vollständig den Charakter der soeben behandelten

Function $\alpha(x)$ hat. Es werden demnach die Integrale

$$C.\int_p^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_p^\infty \frac{[C-\zeta(x)]\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

welche aus (η.) durch Substitution von $C-\zeta(x)$ für $\alpha(x)$ und durch Multiplication mit C entstehen, feste endliche Werthe haben. Gleiches wird daher auch von der Differenz dieser beiden Integrale:

$$\int_p^\infty \frac{\zeta(x)\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

gelten. Damit aber ist bewiesen, dass das Integral (ϑ.) einen festen endlichen Werth besitzt.

Was endlich das Integral dritter Zeile (*in* δ.) *anbelangt*, so wird man offenbar genau dieselbe Methode, deren wir uns soeben bei Untersuchung des Integrales zweiter Zeile bedient haben, anwenden können, um nachzuweisen, dass auch dieses Integral einen festen endlichen Werth besitzt.

Damit ist dann aber der Satz (5.) vollständig bewiesen.

Erster Abschnitt.

§. 1. *Nähere Angabe des zu lösenden Problemes. Untersuchung der Bedingungen, welchen die den stationären Temperaturzustand repräsentirende Function genügen muss.*

Das Problem des stationären Temperatur-Zustandes wird durch die vorliegende Untersuchung für einen homogenen Körper gelöst werden, welcher von irgend zwei gegebenen Kugelflächen begrenzt wird, unter der Voraussetzung, dass der Körper an diesen seinen Begrenzungsflächen mit beliebig gegebenen unveränderlichen Wärmequellen in Contact ist, im Innern des Körpers aber keine weiteren Wärmequellen vorhanden sind. Die Gestalt des Körpers wird, je nach der Lage der beiden gegebenen Kugelflächen zu einander, sehr verschieden ausfallen können; und es sind demgemäss folgende beiden Fälle zu unterscheiden.

(**6.**) Es kann erstens von den beiden Flächen die eine innerhalb der andern liegen, so dass der Körper eine schalenförmige Gestalt besitzt. In diesem Falle handelt es sich darum, denjenigen stationären Temperaturzustand zu bestimmen, zu welchem dieser Körper schliesslich gelangen wird, falls seine Begrenzungsflächen mit beliebig gegebenen und unveränderlichen Wärmequellen in Contact sind. Die anfängliche Temperatur im Innern des Körpers wird dabei gleichgültig, nämlich auf die Beschaffenheit des schliesslich eintretenden stationären Zustandes ohne Einfluss sein.

Bezeichnet man die Temperatur, welche nach Eintritt des stationären Zustandes in irgend einem Puncte (x, y, z) des Körpers vorhan-

den sein wird, mit V, so lautet das hier zu lösende Problem, in die Analysis übersetzt, folgendermassen:

(7.) Es soll eine von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängende Function V ermittelt werden, welche

I. a) innerhalb des Körpers der Gleichung $\Delta V = 0$ *) Genüge leistet;

I. b) welche ferner sammt ihren Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ innerhalb des Körpers überall stetig ist; und welche endlich

II.) an den beiden Begrenzungsflächen beliebig gegebene Werthe besitzt.

(8.) Zweitens kann eine von den beiden gegebenen Kugelflächen ausserhalb der andern liegen. Der von diesen beiden Flächen begrenzte Körper wird dann einen Raum einnehmen, welcher die beiden Kugeln wie Inseln umgiebt und sich nach Aussen hin überall ins Unendliche erstreckt. Auch hier handelt es sich wieder um die Ermittelung desjenigen stationären Temperaturzustandes, welcher in diesem Körper schliesslich eintreten wird, falls die Oberflächen der beiden innern Höhlungen mit beliebig gegebenen, unveränderlichen Wärmequellen in Berührung sind. Jedoch ist hier die Beschaffenheit dieses Zustandes ausser von der Temperatur jener Wärmequellen auch noch abhängig von der Anfangstemperatur dieses nach allen Seiten hin ins Unendliche ausgedehnten Körpers; demnach die hier vorliegende Aufgabe nur dann eine vollständig bestimmte, wenn ausser der Temperatur jener Wärmequellen auch noch die Anfangstemperatur des Körpers gegeben ist. Durch die nachfolgende Untersuchung wird diese Aufgabe für den Fall gelöst werden, dass in dem Körper zu Anfang allenthalben ein und dieselbe Temperatur herrschte. Da man sich immer einer Temperatur-Scala bedienen kann, bei welcher diese gegebene Anfangs-Temperatur in den Nullpunct fällt, so wird die Allgemeinheit der eben genannten Aufgabe keine weitere Beeinträchtigung erleiden, wenn man jene Anfangstemperatur geradezu $= 0$ annimmt.

---

*) Unter ΔV wird stets her Ausdruck $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ verstanden werden.

Ueberträgt man die hiemit vorgelegte Aufgabe in die Analysis, so tritt zu den drei in (7.) aufgestellten Bedingungen noch eine vierte hinzu, welche sich auf die Temperatur in unendlicher Ferne bezieht, und zu welcher man auf folgende Weise gelangt. Um einen Punct O, welcher sich irgendwo im Innern des Körpers, und zwar in der Nähe seiner beiden kugelförmigen Höhlungen befindet, werde eine Kugelfläche K mit einem äusserst grossen Radius beschrieben. Dieselbe soll so gross sein, dass die Dimensionen der Höhlungen und deren Abstände von O im Vergleich mit dem Radius von K verschwindend klein erscheinen. In Bezug auf denjenigen Theil des Körpers, welcher jenseits K liegt, werden dann jene beide Höhlungen wie zwei Puncte erscheinen, und zwar wie zwei Puncte, welche mit dem Centrum O der Fläche K zusammenfallen. Der Temperaturzustand jenseits K wird daher so beschaffen sein, als wären die gegebenen Wärmequellen sämmtlich in O concentrirt. Beachtet man diess und beachtet man ferner, dass zur Zeit des Anfangszustandes die Temperatur überall $= 0$ gewesen sein soll, so ist klar, dass sowohl zur Zeit des nachfolgenden variablen Zustandes als auch zur Zeit des schliesslich eintretenden stationären Zustandes die isothermen Flächen jenseits K aus concentrischen Kugelflächen bestehen werden, deren Centrum in O liegt. In irgend einem jenseits K gelegenen Puncte wird daher nach Eintritt des stationären Zustandes eine Temperatur V vorhanden sein, welche allein von der Entfernung zwischen jenem Puncte und zwischen O abhängt. Bezeichnet man diese Entfernung mit r, so wird also $V = F(r)$ sein. Die Function $F(r)$ muss den Bedingungen (7, I.a und I.b) Genüge leisten und daher folgende Gestalt haben:

$$V = \frac{k}{r} + k'$$

wo k und k' irgend welche Constanten vorstellen. Beachtet man nun ausserdem, dass sich die Temperatur V, wenn r ins Unendliche anwächst, immer mehr und mehr derjenigen Temperatur nähern muss, welche zu Anfang im ganzen Körper vorhanden war, dass also V für $r = \infty$ gegen 0 convergiren muss, so ergiebt sich sofort, dass $k' = 0$ ist. Die Gleichung

$$V = \frac{\quad}{r}\ .$$

zu welcher wir hierdurch gelangen, enthält eine vierte Bedingung, welche bei Bestimmung des stationären Temperaturzustandes mit zu beachten ist.

(**9.**) Es handelt sich demnach hier um die Ermittelung einer von (x, y, z) abhängenden Function V, welche

I. a) an allen Stellen des Körpers der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt,

I. b) welche ferner sammt den Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ im Körper allenthalben stetig ist,

I. c) welche ausserdem für unendlich weit entfernte Lagen des Punctes (x, y, z) gegen einen Werth von der Form $\frac{k}{r}$ convergirt, wo k irgend welche Constante bedeutet und r den unendlich grossen Abstand vorstellt, welchen der Punkt (x, y, z) alsdann von irgend einem festen Puncte O aus besitzt;

II.) und welche endlich an den beiden innern Begrenzungsflächen des Körpers beliebig gegebene Werthe besitzt.

Um für die nachfolgenden Untersuchungen die Uebersicht zu erleichtern, wird es zweckmässig sein, sowohl in (7.) als auch in (9.) die Bedingungen (I.) scharf zu trennen von den Bedingungen (II.) Die ersteren, welche allein von der Gestalt des Körpers abhängen, nämlich vollständig hingestellt werden können, sobald der von dem Körper eingenommene Raum bekannt ist, werde ich die Hauptbedingungen, die letztern hingegen, zu deren Festsetzung es noch der jedesmaligen Angabe einer oder mehrerer Functionen bedarf, die Nebenbedingungen nennen.

(**10.**) *Unter einer Function Φ des Punctes (x, y, z), welche innerhalb eines gegebenen Raumes die Hauptbedingungen erfüllt, soll demnach fortan eine Function verstanden werden, welche*

a) innerhalb jenes Raumes überall der Gleichung $\Delta\Phi = 0$ genügt,

b) welche ferner innerhalb desselben sammt $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ allenthalben stetig bleibt,

c) und welche endlich, falls der gegebene Raum sich ins Unendliche hin erstreckt, gegen einen Werth von der Form $\frac{k}{r}$ convergirt, sobald der Punct (x, y, z) nach unendlich fernen Stellen dieses Raumes

fortrückt, wo k irgend welche Constante bezeichnet, und r die alsdann zwischen (x, y, z) und irgend einem festen Puncte O vorhandene unendlich grosse Entfernung vorstellt.

In Betreff dieser Hauptbedingungen mag noch Folgendes bemerkt werden. Denkt man sich ausserhalb eines gegebenen Raumes oder auch auf den Begrenzungsflächen desselben irgend welche Massenvertheilung, so wird das Potential dieser Massen auf einen variablen Punct (x, y, z), der innerhalb des gegebenen Raumes liegt, eine Function von x, y, z sein, welche offenbar den Bedingungen a), b) und, falls der gegebene Raum sich nach allen Seiten hin ins Unendliche ausdehnt, auch der Bedingung c) Genüge leistet. Ein solches Potential wird also stets eine Function sein, welche innerhalb des gegebenen Raumes den Hauptbedingungen Genüge leistet.

Da wir im Folgenden fast beständig mit Functionen zu thun haben werden, die innerhalb irgend welches Raumes die Hauptbedingungen erfüllen, so wird es hier am Orte sein, zwei Theoreme anzugeben, durch welche die Rechnungs-Operationen mit derartigen Functionen eine ausserordentliche Einfachheit gewinnen.

(11.) **Erstes Theorem.** *Sind Φ und Ψ Functionen von x, y, z, welche innerhalb eines beliebig gegebenen Raumes, der jedoch nach Aussen hin entweder allseitig begrenzt oder allseitig unbegrenzt vorausgesetzt wird, den Hauptbedingungen (10.) Genüge leisten, so ist:*

$$\mathrm{S}\left(\Psi\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{d\Psi}{dN}\right)do=0,$$

wo do irgend ein Element der den Raum begrenzenden Flächen, N die auf do errichtete, aus dem gegebenen Raum hinauslaufende Normale vorstellt, und wo die Integration über sämmtliche Begrenzungsflächen) des Raumes ausgedehnt ist.*

---

*) Ein Raum, der äusserlich nach allen Seiten hin unbegrenzt ist, hat, dem Wortlaute zufolge, nach Aussen hin keine Grenze. Dem entsprechend wird unter dem Namen „Begrenzungsfläche" immer eo ipso eine in der Endlichkeit liegende Fläche verstanden werden, so dass z. B. der nach allen Seiten hin sich ins Unendliche erstreckende, eine gegebene Kugelfläche wie eine Insel umgebende Raum nur eine Begrenzungsfläche besitzt.

(**12.**) **Zweites Theorem.** *Ist Φ eine Function von x, y, z, welche innerhalb eines gegebenen Raumes, der jedoch nach Aussen hin entweder allseitig begrenzt oder allseitig unbegrenzt vorausgesetzt wird, die Hauptbedingungen erfüllt, und bezeichnet T den reciproken Werth der Entfernung des Punctes (x, y, z) von irgend einem festen Puncte (x_1, y_1, z_1), so ist das Integral*

$$\mathrm{S}\left(T\frac{d\Phi}{dN} - \Phi\frac{dT}{dN}\right)do,$$

jenachdem (x_1, y_1, z_1) ausserhalb oder innerhalb des gegebenen Raumes liegt, entweder $= 0$ oder $= 4\pi\Phi_1$, wo unter Φ_1 derjenige Werth zu verstehen ist, welchen Φ im Puncte (x_1, y_1, z_1) besitzt. Die Bedeutungen von do, N und des Integrationszeichens S sind hier dieselben, wie in (11.).

Beweis dieser beiden Theoreme. Es sei zunächst ein in der Endlichkeit liegender Raum gegeben, dessen Begrenzung einen besonders einfachen Charakter darbietet, nämlich so beschaffen ist, dass sie (wie es z. B. bei einem Ellipsoide oder bei einem Parallelepipedum der Fall ist) von jeder geraden Linie immer nur in zwei Puncten geschnitten wird. Ausserdem sei irgend welche Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z gegeben, deren Werthe stetig sind, so lange der Punct (x, y, z) innerhalb des genannten Raumes bleibt, über deren Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ jedoch — was die Stetigkeit oder Unstetigkeit ihrer Werthe anbelangt — keinerlei Voraussetzungen gemacht werden sollen.

Der gegebene Raum werde durch Ebenen, die zum Theil mit der $\overline{xy}$-, zum Theil mit der $\overline{xz}$ Ebene parallel sind, in unendlich dünne Prismen zerlegt. Irgend eines dieser Prismen reiche von einer Stelle A der Begrenzungsfläche des Raumes bis zu einer andern Stelle B derselben hin; do_a und do_b seien die beiden Elemente jener Fläche, welche das Prisma bei A und B begrenzen; ferner sei $dx\,dy\,dz$ irgend ein Volumelement des Prismas, und $\frac{\partial f}{\partial x}$ der diesem Volumelement entsprechende Werth des Differential-Quotienten $\frac{\partial f}{\partial x}$: alsdann wird das über alle Volumelemente des Prismas ausgedehnte Integral von $\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$ immer*) folgenden Werth besitzen:

---

*) Bekanntlich gilt für irgend eine Function $\varphi(x)$ die Formel

$$(*) \qquad \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = (f_b - f_a)\, dy\, dz,$$

wo x_a, x_b und f_a, f_b die den Endpuncten A, B des Prismas entsprechenden Werthe von x und f vorstellen. Da der senkrechte Querschnitt $dy\, dz$ des Prismas als die Projection des Elementes do_a und ebenso auch als die des Elementes do_b auf die $\overline{yz}$ Ebene angesehen werden kann, so wird, falls α und β die spitzen Winkel sind, unter welchen die Elemente do_a, do_b gegen die $\overline{yz}$ Ebene geneigt sind,

$$(**) \qquad dy\, dz = do_a \cos\alpha = do_b \cos\beta$$

sein. Versteht man unter N_a und N_b (Fig. 1.) die auf do_a und do_b errichteten und aus dem gegebenen Raum hinauslaufenden Normalen, ferner unter (N_a, x), (N_b, x) die Winkel, welche diese Richtungen mit der Richtung der x Achse einschliessen, so wird man

$$\alpha = 180^\circ - (N_a, x) \qquad \beta = (N_b, x)$$

haben, und durch Substitution dieser Werthe in (**)

$$dy\, dz = -do_a \cos(N_a, x) = +do_b \cos(N_b, x)$$

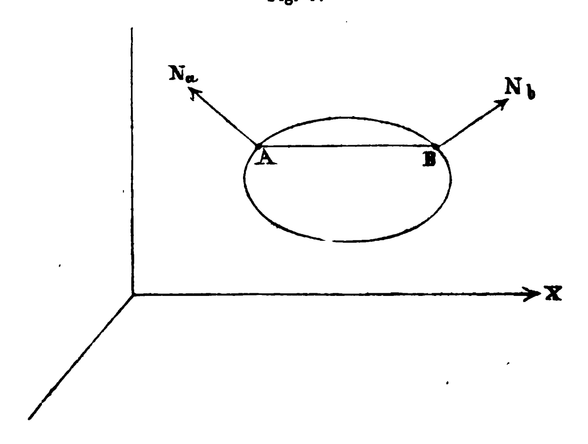
erhalten. Hierdurch gewinnt die Gleichung (*) folgende Gestalt:

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = f_a \cos(N_a, x)\, do_a + f_b \cos(N_b, x)\, do_b.$$

$$\int_p^q \varphi'(x)\, dx = \varphi(q) - \varphi(p)$$

auch dann, wenn $\dfrac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$ unstetig ist, falls nur $\varphi(x)$ selber von Unstetigkeiten frei ist. Man überzeugt sich hievon in der That augenblicklich, wenn man $\varphi(x)$ als die Ordinate einer Curve betrachtet. Diese Curve wird, da $\varphi(x)$ als stetig vorausgesetzt ist, in ihrem Zuge keine Unterbrechung darbieten, wird aber, da $\varphi'(x)$ unstetig sein kann, in ihrem Laufe möglicherweise plötzliche Wendungen machen. Man übersieht aber sofort, dass das Integral $\int_p^q \varphi(x)\, dx$ auch dann, wenn solche plötzliche Wendungen vorhanden sind, immer die Höhe darstellen wird, um welche die Curve beim Fortgang von der Abscisse $x = p$ bis zur Abscisse $x = q$ ansteigt, mithin immer gleich $\varphi(q) - \varphi(p)$ sein wird. Demnach wird die Gleichung (*) gelten, obwohl hinsichtlich des Ganges der Function $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ jede Voraussetzung unterblieben ist.

Fig. 1.



Da in dieser Gleichung unter dem Integrale links alle Volumelemente $dx\,dy\,dz$ des betrachteten Prismas vertreten sind und rechts die beiden Endflächen do_a, do_b desselben sich vorfinden, so wird man, falls die analogen Gleichungen für alle übrigen Prismen, aus denen der gegebene Raum besteht, ebenfalls aufgestellt gedacht werden, durch Addition aller dieser Gleichungen eine Formel erhalten, in welcher links alle Volumelemente aller Prismen, d. i. sämmtliche Volumelemente des ganzen gegebenen Raumes vertreten sind, und in welcher sich auf der rechten Seite die vordern und hintern Endflächen aller Prismen, d. i. sämmtliche Flächenelemente do vorfinden, aus welchen die Begrenzung des Raumes besteht. Die in Rede stehende Addition wird daher eine Formel

$$(\alpha.) \qquad \iiint \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \mathrm{S} f \cos(N, x)\, do$$

iefern, in der das Integral links über das ganze Volumen, das rechts über die ganze Begrenzung des gegebenen Raumes ausgedehnt ist.

Haben wir es nun nicht mehr mit einem Raume von dem bis jetzt vorausgesetzten besonders einfachen Charakter, sondern mit einem ganz beliebig gestalteten, jedoch in der Endlichkeit liegenden Raume zu thun, so werden wir die Formel (α.) allerdings nicht mehr unmittelbar anwenden dürfen; dagegen werden wir immer im Stande sein, den gegebenen Raum, welches auch die Anzahl seiner Begrenzungsflächen und wie auch die Gestalt derselben beschaffen sein mag, durch irgend welche Flächen in Raumtheile zu zerlegen, deren jeder jenen besonders einfachen Charakter besitzt, und sodann die Formel (α.) auf jeden einzelnen dieser Raumtheile anwenden dür-

fen, vorausgesetzt, dass die gegebene Function $f(x, y, z)$ innerhalb des ganzen gegebenen Raumes wiederum überall stetig ist. Denken wir uns nun die Gleichung $(\alpha.)$ für alle jene Raumtheile wirklich aufgestellt, so werden sich bei der Addition aller dieser Gleichungen auf der rechten Seite diejenigen Integrale fortheben, welche sich auf die zur Zerlegung angewendeten Flächen beziehen. Stellt nämlich do irgend ein Element einer solchen Fläche vor und sind R und R' die beiden Raumtheile, welche in do zusammengrenzen, so wird die für R gebildete Gleichung $(\alpha.)$ das Glied

$$f \cos(N, x)\, do$$

und die für R' gebildete das Glied

$$f \cos(N', x)\, do$$

enthalten. Es haben aber diese beiden Glieder entgegengesetzte Werthe, weil N, N' zwei Linien von entgegengesetzter Richtung, nämlich N die auf do errichtete und aus R herauslaufende, N' die aus R' herauslaufende Normale vorstellen. Aus den vorhin bezeichneten Gleichungen wird sich demnach durch Addition folgendes Resultat ergeben:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \mathrm{S} f \cos(N,\, x).do$$

wo das Integral links über das ganze Volumen, das Integral rechts über alle Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes ausgedehnt ist. Analoge Formeln werden sich natürlich auch für die Integrale $\iiint \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy\, dz$ und $\iiint \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$ ableiten lassen. In diesen Formeln lassen sich die trigonometrischen Grössen $\cos(N, x)$, $\cos(N, y)$, $\cos(N, z)$ durch gewisse Differential-Quotienten ersetzen. Versteht man nämlich unter dx, dy, dz die Zuwächse, welche die Coordinaten des Punctes x, y, z erhalten, während derselbe von einer Stelle der Begrenzung aus in der Richtung der dort vorhandenen Normale N um die kleine Strecke dN fortrückt, so werden sich dx, dy, dz als die rechtwinkligen Projectionen von dN ansehen, folglich so darstellen lassen:

$$dx = dN \cos(N, x), \qquad dy = dN \cos(N, y) \qquad dz = dN \cos(N, z).$$

Mit Rücksicht hierauf lässt sich das gefundene Resultat so aussprechen:

Sind die Werthe einer Function $f(x, y, z)$ innerhalb eines gegebenen in der Endlichkeit liegenden Raumes allenthalben stetig, so gelten immer folgende Formeln:

$$(\beta.)\begin{cases}\iiint\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \mathsf{S}f\cos(N,x)\,do = \mathsf{S}f\frac{dx}{dN}do\\ \iiint\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \mathsf{S}f\cos(N,y)\,do = \mathsf{S}f\frac{dy}{dN}do\\ \iiint\frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \mathsf{S}f\cos(N,z)\,do = \mathsf{S}f\frac{dz}{dN}do\end{cases}$$

wo sich die Integration $\iiint$ auf alle Volumelemente, die Integration S auf alle Begrenzungselemente do des gegebenen Raumes erstreckt, und wo N die auf do errichtete, aus dem Raume hinauslaufende Normale vorstellt.

Sind nun $\Phi = \Phi(x, y, z)$ und $\Psi = \Psi(x, y, z)$ zwei Functionen, welche sammt ihren ersten Ableitungen innerhalb des hier betrachteten Raumes überall stetig sind, so wird dasselbe auch von den aus diesen Functionen und aus ihren ersten Ableitungen zusammengesetzten Ausdrücken

$$f_1 = \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

$$f_2 = \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

$$f_3 = \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

gelten, so dass die Formeln (β.) auf dieselben sofort anwendbar sind. Dadurch ergiebt sich:

$$\iiint\frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iiint\left(\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)dx\,dy\,dz$$
$$= \mathsf{S}\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{dx}{dN}do$$

$$\iiint\frac{\partial f_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iiint\left(\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)dx\,dy\,dz$$
$$= \mathsf{S}\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dN}do$$

$$\iiint\frac{\partial f_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iiint\left(\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz$$
$$= \mathsf{S}\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\frac{dz}{dN}do$$

und daraus durch Addition:

$$\iiint(\Psi\,\Delta\Phi - \Phi\,\Delta\Psi)\,dx\,dy\,dz = \mathsf{S}\left(\Psi\frac{d\Phi}{dN} - \Phi\frac{d\Psi}{dN}\right)do$$

also, falls $\Delta\Phi$ und $\Delta\Psi$ innerhalb des gegebenen Raumes überall Null sind:

$$(\gamma.)\qquad \int\!\!\!\int\left(\Psi\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{d\Psi}{dN}\right)do = 0.$$

Offenbar wird den hier an Ψ gestellten Anforderungen genügt, wenn man $\Psi = 1$ setzt, so dass sich als specieller Fall noch folgende Formel ergiebt:

$$(\gamma'.)\qquad \int\!\!\!\int\frac{d\Phi}{dN}do = 0.$$

Ferner werden die bei Ableitung der Formel $(\gamma.)$ in Bezug auf $\Psi(x, y, z)$ gemachten Voraussetzungen auch dann erfüllt werden, wenn man für diese Function den reciproken Werth T derjenigen Entfernung nimmt, welche der variable Punct (x, y, z) von irgend einem festen Puncte (1) aus besitzt, vorausgesetzt, dass derselbe sich ausserhalb des gegebenen Raumes befindet. Unter dieser Voraussetzung wird daher

$$(\delta.)\qquad \int\!\!\!\int\left(T\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{dT}{dN}\right)do = 0$$

sein. Befindet sich (1) innerhalb des gegebenen Raumes, so wird T die in Bezug auf Ψ gemachten Voraussetzungen auch noch an allen Stellen des gegebenen Raumes, mit Ausnahme der Stelle (1), erfüllen, in (1) aber unstetig (nämlich unendlich gross) sein. Wenn wir daher in diesem Fall die Formel $(\gamma.)$ auch nicht direct anwenden können, so wird doch ihrer Anwendung nichts mehr im Wege stehen, sobald wir zuvor die störende Stelle (1) von dem gegebenen Raume abgesondert haben. Wir bewerkstelligen diese Absonderung mit Hülfe einer Kugelfläche, die wir um (1) als Mittelpunct mit beliebigem Radius r beschreiben; bezeichnen den dann von dem gegebenen Raume noch übrig bleibenden Theil mit A, den abgesonderten Theil selber d. i. den Innenraum der Kugel hingegen mit K; und erhalten dann durch Anwendung der genannten Formel auf den Raum A:

$$(\varepsilon.)\qquad \int\!\!\!\int\left(T\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{dT}{dN}\right)do + \int\!\!\!\int_{\varkappa}\left(T\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{dT}{dN}\right)do = 0,$$

wo sich die Integration auf die ganze Begrenzung des Raumes A erstreckt, wo sich nämlich das Integral $\int\!\!\!\int$ auf die ursprünglich vorhandene Begrenzung dieses Raumes, das Integral $\int\!\!\!\int_{\varkappa}$ hingegen auf die neu hinzugekommene d. i. auf jene Kugelfläche beziehen soll. Der Werth des letzteren Integrales lässt sich genauer bestimmen. Da nämlich das in $\int\!\!\!\int_{\varkappa}$ vorhandene T seiner Definition zufolge $= \frac{1}{r}$, ferner die dort vorhandene Richtung N mit r entgegengesetzt ist, so wird:

$$\mathsf{S}_x\left(T\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{dT}{dN}\right)do = -\mathsf{S}_x\left(\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}+\Phi\frac{1}{r^2}\right)do$$
$$= -\frac{1}{r}\mathsf{S}_x\frac{d\Phi}{dr}do-\frac{1}{r^2}\mathsf{S}_x\Phi\, do.$$

Offenbar ist nun aber zufolge (γ'.) $\mathsf{S}_x\frac{d\Phi}{dr}do = 0$, weil Φ, wie wir vorausgesetzt haben, innerhalb des ganzen gegebenen Raumes, mithin auch innerhalb der Kugel K den zum Bestehen von (γ.) oder (γ'.) erforderlichen Bedingungen genügt. Somit verwandelt sich die Gleichung (ε.) in

$$(\zeta.)\qquad \mathsf{S}\left(T\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{dT}{dN}\right)do = \frac{1}{r^2}\mathsf{S}_x\Phi\, do.$$

Versteht man nun unter M_r den grössten Werth unter allen denjenigen, welche Φ innerhalb und an der Oberfläche der mit dem Radius r um (1) beschriebenen Kugelfläche besitzt, und unter m_r den kleinsten unter allen diesen Werthen, so wird offenbar das über die Kugelfläche ausgedehnte Integral $\mathsf{S}_x\Phi\, do$ kleiner als $M_r\mathsf{S}_x do = 4\pi r^2 M_r$ und grösser als $m_r\mathsf{S}_x do = 4\pi r^2 m_r$ sein. Demnach ergiebt sich aus (ζ.)

$$(\eta.)\qquad 4\pi m_r < \mathsf{S}\left(T\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{dT}{dN}\right)do < 4\pi M_r.$$

Gleichzeitig wird, falls man den Werth von Φ im Mittelpunct (1) der Kugel mit Φ_1 bezeichnet, der Definition von M_r und m_r zufolge

$$(\eta'.)\qquad 4\pi m_r < \quad 4\pi\Phi_1 \quad < 4\pi M_r$$

sein. Die beiden Formeln (η.), (η'.) werden, da zu ihrer Herleitung über die Grösse des Kugelradius r keinerlei Voraussetzung erforderlich war, gültig bleiben, wenn man r variirt, z. B. r kleiner und kleiner werden lässt. Diese Operation wird auf das in (η.) vorhandene Integral, welches der unveränderlich gegebenen Begrenzung des betrachteten Raumes zugehört, gar nicht influiren, ebensowenig auf den Werth Φ_1 influiren, sondern lediglich auf die Werthe M_r und m_r einwirken. Da Φ im ganzen gegebenen Raume der Voraussetzung nach stetig ist, so wird der Unterschied, um welchen die Werthe von Φ im Innern der Kugel von einander differiren, mithin auch $M_r - m_r$ kleiner und kleiner werden, sobald sich die Kugelfläche mehr und mehr zusammenzieht. Und zwar wird man durch fortgesetzte Verkleinerung von r den Unterschied zwischen M_r und m_r also (den Formeln (η.), (η') zufolge) auch den zwischen den festen Werthen

$$\mathsf{S}\left(T\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{dT}{dN}\right)do \quad \text{und} \quad 4\pi\Phi_1$$

möglicherweise vorhandenen Unterschied auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit reduciren können. Man wird demnach durch Verkleinerung von r zeigen

können, dass die letztgenannten beiden Werthe um keine überhaupt denkbare Grösse verschieden sein können. Es muss daher zwischen denselben vollständige Gleichheit stattfinden. Also:

$$(\vartheta.)\qquad \mathrm{S}\left(T\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{dT}{dN}\right)do = 4\pi\Phi_1.$$

Durch (γ.) *ist das erste und durch die Formeln* (δ.), (ϑ.) *das zweite Theorem für den Fall bewiesen, dass der gegebene Raum in der Endlichkeit liegt, also nach Aussen hin auf allen Seiten begrenzt ist.*

Nehmen wir nun irgend eine dieser drei Formeln, z. B. die erste (γ.), und untersuchen wir, in welcher Weise sich dieselbe verändern wird, falls die äussere Begrenzungsfläche des bisher betrachteten Raumes sich mehr und mehr erweitert und sich zuletzt nach allen Seiten hin ins Unendliche entfernt. Das in jener Formel

$$(\varkappa.)\qquad \mathrm{S}\left(\Psi\frac{d\Phi}{dN}-\Phi\frac{d\Psi}{dN}\right)do = 0$$

enthaltene Integral kann in zwei Theile zerlegt werden, in einen Theil S_a, der sich auf die äussere Begrenzungsfläche des gegebenen Raumes, und in einen zweiten Theil S_i, der sich auf sämmtliche innere Begrenzungsflächen zusammengenommen bezieht. Dadurch geht die Formel über in

$$(\varkappa'.)\qquad \mathrm{S}_a+\mathrm{S}_i = 0.$$

Ehe wir nun den gegebenen Raum nach Aussen hin anwachsen lassen, wollen wir in Betreff der Functionen Φ und Ψ die Voraussetzung eintreten lassen, dass die für die Gültigkeit der Formel ($\varkappa$.) innerhalb des gegebenen Raumes erforderlichen Bedingungen von jenen Functionen auch in demjenigen Raume erfüllt werden, welcher den gegebenen wie eine Insel umschliesst und nach Aussen hin ins Unendliche reicht, d. i. annehmen, dass an allen Stellen des letztgenannten Raumes Φ, Ψ sammt ihren ersten Ableitungen stetig und $\Delta\Phi$, $\Delta\Psi$ Null sind. Demgemäss wird dann die Formel ($\varkappa$.) oder ($\varkappa'$.) nach wie vor fortbestehen, wie weit man auch den gegebenen Raum nach Aussen hin anwachsen lassen mag. Das den unbeweglichen innern Begrenzungsflächen zugehörige Integral S_i wird dabei vollständig ungeändert bleiben und nur die Fläche, über welche das Integral S_a ausgedehnt ist, sich fortbewegen.

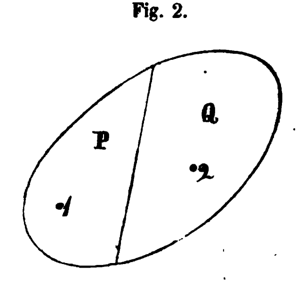
Wir wollen nun ferner in Betreff der von dem variablen Punct (x, y, z) abhängenden Functionen $\Phi(x, y, z)$ und $\Psi(x, y, z)$ noch annehmen, dass dieselben, sobald jener Punct sich ins Unendliche hin entfernt, gegen Werthe von der Form $\frac{\varkappa_1}{R_1} = \varkappa_1 T_1$ und $\frac{\varkappa_2}{R_2} = \varkappa_2 T_2$ convergiren, wo $R_1 = \frac{1}{T_1}$,

$R_2 = \frac{1}{T_2}$ die äusserst grossen Distanzen vorstellen sollen, welche jener ins Unendliche hin sich entfernende Punct (x, y, z) von irgend zwei festen Puncten (1) und (2) aus besitzt, und wo unter $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ irgend welche Constanten verstanden werden sollen. Unter diesen Umständen wird dann, falls man die äussere Begrenzungsfläche nach allen Seiten hin ins Unendliche fortrücken lässt, das ihr zugehörige Integral S_a durch

$$(\lambda.)\qquad \mathrm{S}_a = \varkappa_1 \varkappa_2 \mathrm{S}_a \left(T_2 \frac{dT_1}{dN} - T_1 \frac{dT_2}{dN} \right) do$$

dargestellt werden können. Ich werde nun nachweisen, dass ein Integral dieser Art, d. h. ein Integral, welches in solcher Weise, wie das vorstehende, von zwei festen Puncten (1), (2) und von einer diese Puncte umgebenden geschlossenen Fläche abhängt, immer Null ist, mag nun die Gestalt der Fläche sein, welche sie wolle, mag dieselbe in der Endlichkeit liegen, oder mag sie, wie es hier der Fall ist, sich ringsherum in unendlicher Ferne befinden. Zu diesem Ende zerlege ich den Innenraum der Fläche durch eine Scheidewand in zwei Theile P, Q, von welchen jeder einen der beiden Puncte (1), (2) in sich enthält (Fig. 2.). Auf den

Fig. 2.



Raum P mit dem darin liegenden Punct (1) ist dann die Formel (ϑ.) sofort anwendbar, und zwar kann man dabei für das in jener Formel (ϑ.) auftretende Φ die Function T_2 nehmen, weil diese nicht allein der Gleichung $\Delta T_2 = 0$ genügt, sondern, da (2) ausserhalb P liegt, auch die erforderlichen Stetigkeitsbedingungen erfüllt. Dadurch ergiebt sich

$$(*)\qquad \mathrm{S}_P \left(T_1 \frac{dT_2}{dN} - T_2 \frac{dT_1}{dN} \right) do = 4\pi\, T_{21},$$

wo T_{21} denjenigen Werth vorstellt, welchen die Function T_2 im Puncte (1) besitzt, also gleich der reciprok genommenen Entfernung zwischen (1) und (2) ist. Aehnlich ergiebt sich durch Anwendung derselben Formel (ϑ.) auf den Raum Q und den Punct (2):

$$\mathrm{S}_Q \left(T_2 \frac{dT_1}{dN} - T_1 \frac{dT_2}{dN} \right) do = 4\pi\, T_{12}$$

d. i.

$$(**)\qquad \mathrm{S}_Q \left(T_1 \frac{dT_2}{dN} - T_2 \frac{dT_1}{dN} \right) do = -4\pi\, T_{12}.$$

Bei Addition der Formeln (*) und (**) zerstören sich diejenigen beiden Theile

der Integrale, welche der Scheidewand zugehören, weil die Normalen N in dem einen und in dem andern Integral daselbst entgegengesetzte Richtungen haben; so dass man erhält:

$$\mathsf{S}_a\left(T_1\frac{dT_2}{dN}-T_2\frac{dT_1}{dN}\right)do=0,$$

wo die Integration sich nun nur noch auf die ursprünglich vorhandene geschlossene Fläche bezieht. Diese Formel wird offenbar gültig bleiben, welche Gestalt die Fläche auch besitzen mag, und auch dann gültig bleiben, wenn dieselbe nach allen Seiten hin ins Unendliche fortrückt. Damit ist also bewiesen, dass das Integral S_a in (λ.) verschwindet.

Die Formel ($\varkappa$.), welche den Anfang der gegenwärtigen Untersuchung bildete, bezog sich damals auf einen in der Endlichkeit liegenden Raum, also auf einen Raum, der eine äussere und ausserdem irgend welche Anzahl n innere Begrenzungsflächen besitzt. Jener Formel zufolge hat ein gewisses auf die ganze Begrenzung dieses Raumes bezügliches Integral, also, genauer *ausgedrückt*, eine Summe von gewissen, den $(n+1)$ Begrenzungsflächen entsprechenden, $(n+1)$ Integralen den Werth Null. Geht nun dieser äusserlich allseitig *begrenzte* Raum in einen äusserlich allseitig *unbegrenzten* über, so reducirt sich dadurch die Anzahl seiner Begrenzungsflächen auf n. Gleichzeitig mit dem Fortfallen der $(n+1)$ten (d. i. der äusseren) Begrenzungsfläche fällt nun aber, wie wir soeben gesehen haben, auch das auf diese bezügliche Integral fort. Für den äusserlich allseitig unbegrenzten Raum gilt demnach derselbe Satz wie für den äusserlich allseitig begrenzten, indem in beiden Fällen die Summe sämmtlicher den vorhandenen Begrenzungsflächen zugehörigen Integrale denselben Werth Null besitzt.

Hiermit ist das erste Theorem vollständig bewiesen. Dass man in genau derselben Weise auch die Gültigkeit des zweiten Theorems für einen äusserlich allseitig unbegrenzten Raum darthun kann, übersieht man sofort, und bedarf keiner weiteren Erörterung.

§. 2. *Einführung neuer Coordinaten.*

Versteht man unter x, $\mathfrak{y}$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes der Ebene und unter ϑ, ω diejenigen Functionen von x, $\mathfrak{y}$, welche durch eine Gleichung von der Form

$$(13.)\qquad F(\vartheta+i\omega,\ x+i\mathfrak{y})=0,\quad (i=\sqrt{-1})$$

definirt werden, so sind bekanntlich

$$(14.)\qquad \vartheta=\text{Const.}\qquad \omega=\text{Const.}$$

die Gleichungen zweier orthogonalen Curvensysteme, von denen das erstere das System der ϑ-Curven, das andere das System der ω-Curven genannt werden mag. Wir wollen diejenigen Curven näher untersuchen, welche sich in dieser Weise für den Fall ergeben, dass die Gleichung (13.) folgende Gestalt besitzt:

$$(15.)\quad e^{\vartheta+i\omega}=\frac{x+i\mathfrak{y}-a}{x+i\mathfrak{y}+a}\quad\text{oder}\quad x+i\mathfrak{y}=a\,\frac{1+e^{\vartheta+i\omega}}{1-e^{\vartheta+i\omega}},$$

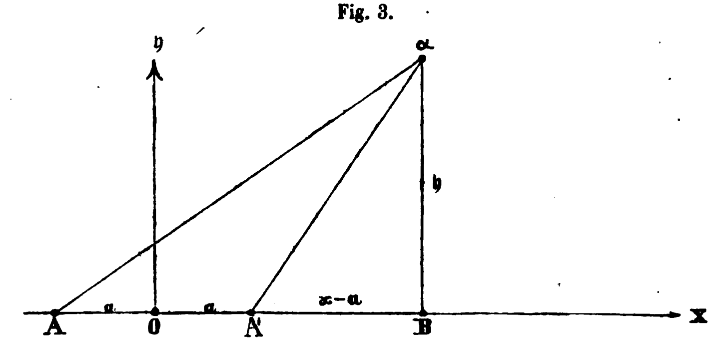
wo $e=2{,}718\ldots$ und a eine beliebige reelle Constante sein soll. Durch Sonderung des Reellen und Imaginären ergeben sich hieraus für ϑ und ω folgende Formeln:

$$(16.)\quad e^{2\vartheta}=\frac{(x-a)^2+\mathfrak{y}^2}{(x+a)^2+\mathfrak{y}^2},\quad\text{oder (16.a.)}\quad\left(x-a\,\frac{1+e^{2\vartheta}}{1-e^{2\vartheta}}\right)^2+\mathfrak{y}^2=\left(\frac{2ae^{\vartheta}}{1-e^{2\vartheta}}\right)^2$$

$$(17.)\quad \operatorname{tg}\omega=\frac{2a\mathfrak{y}}{x^2+\mathfrak{y}^2-a^2},\quad\text{oder (17.a.)}\quad x^2+\left(\mathfrak{y}-\frac{a}{\operatorname{tg}\omega}\right)^2=\left(\frac{a}{\sin\omega}\right)^2,$$

mit deren Hülfe es leicht ist die geometrische Bedeutung zu erkennen, welche diese Functionen ϑ, ω für irgend einen Punct $(x,\mathfrak{y})$ besitzen. Construirt man nämlich (Fig. 3.) zwei Puncte A, A', welche auf der

Fig. 3.



x Achse, links und rechts in der Entfernung a vom Anfangspuncte liegen, und bezeichnet man die Lage des beliebigen Punctes $(x,\mathfrak{y})$ mit α, so ist zufolge (16.)

$$(18.)\qquad e^{\vartheta}=\frac{\overline{\alpha A'}}{\overline{\alpha A}}.$$

Ferner ergiebt sich aus Fig. 3:

$$\operatorname{tg}\widehat{B\alpha A}=\frac{x+a}{\mathfrak{y}}\qquad\qquad \operatorname{tg}\widehat{B\alpha A'}=\frac{x-a}{\mathfrak{y}}$$

und daher die trigonometrische Tangente der Differenz beider Winkel:

$$\operatorname{tg} \widehat{A\alpha A'} = \frac{2a\mathfrak{y}}{x^2 + \mathfrak{y}^2 - a^2}$$

d. i. nach (17.):

(19.) $$\operatorname{tg} \widehat{A\alpha A'} = \operatorname{tg} \omega.$$

Man kann die Werthe, welche ϑ, ω für irgend einen Punct besitzen, als Parameter dieses Punctes oder als neue Coordinaten desselben betrachten, und hat dann, falls die beiden festen Puncte A, A' Pole und die von einem beliebigen Puncte aus nach A, A' hinlaufenden Linien Pol-Abstände genannt werden, (aus 18. und 19.) folgende Sätze:

(20.) *Die ϑ-Coordinate irgend eines Punctes ist gleich dem Logarithmus des Quotienten seiner beiden Pol-Abstände, und die ω-Coordinate desselben gleich der Neigung dieser beiden Abstände gegeneinander. Ausserdem mag sofort noch ein dritter Parameter ξ eingeführt werden, welcher die mittlere Proportionale zwischen den beiden Pol-Abständen darstellen soll.* Bezeichnet man also die Werthe der drei Parameter ϑ, ω, ξ für irgend einen Punct α mit ϑ_α, ω_α, ξ_α, so ist:

(21.) $$e^{\vartheta_\alpha} = \frac{\overline{\alpha A'}}{\overline{\alpha A}} \qquad \omega_\alpha = \widehat{A'\alpha A} \qquad \xi_\alpha = \sqrt{\overline{\alpha A}\,.\,\overline{\alpha A'}},$$

wo ξ immer positiv sein soll.

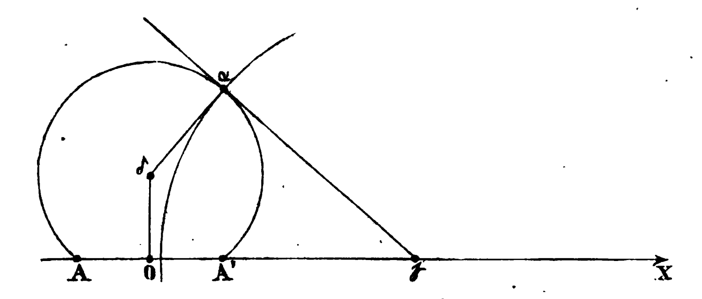
(21. a.) Nunmehr können wir uns leicht eine Uebersicht der Werthe verschaffen, welche ϑ und ω für alle Puncte der $x\mathfrak{y}$ Ebene besitzen. Dabei werden wir uns jedoch auf diejenigen Puncte beschränken, welche oberhalb der x Achse liegen, weil die Berücksichtigung der Puncte unterhalb dieser Achse für unsere Zwecke nicht erforderlich ist. Aus (21.) erkennt man sofort, dass ϑ für alle Puncte rechts von der $\mathfrak{y}$ Achse negativ, für alle Puncte links von derselben positiv, und für die Puncte der $\mathfrak{y}$ Achse selber Null ist; ferner, dass für den rechtsliegenden Pol A' $\vartheta = -\infty$ und für den linksliegenden A $\vartheta = +\infty$ ist.

(21. b.) Was ferner ω anbelangt, so ergiebt sich aus (21.), dass dasselbe für alle Puncte oberhalb der x Achse zwischen 0° und 180° liegt. Für die zwischen A und A' befindlichen Puncte der x Achse ist $\omega = 180°$, für diejenigen Puncte der x Achse hingegen, welche aus-

serhalb des Segmentes $\overline{AA'}$ liegen, $\omega = 0$. Legt man ferner durch die beiden Pole A und A' einen beliebigen Kreis, so ist ω für alle Puncte α, die auf diesem Kreise und zugleich oberhalb der x Achse liegen, constant, nämlich (nach 21.) gleich dem über der Sehne $\overline{AA'}$ errichteten Peripheriewinkel $A\alpha A'$.

Aus (16. a.) und (17. a.) ersieht man, dass nicht allein die ω-Curven (d. i. die Curven mit constantem ω), sondern auch die ϑ-Curven aus Kreisen bestehen. Diese beiden Systeme von Kreisen müssen, der allgemeinen Bemerkung in (14.) zufolge, untereinander orthogonal sein. Um daher die durch einen gegebenen Punct α hindurchgehende ω-Curve und ϑ-Curve zu erhalten, wird man nur (Fig. 4.) einen durch α, A und

Fig. 4.



A' gehenden Kreis, und sodann einen zweiten Kreis zu construiren haben, welcher diesen bei α senkrecht durchschneidet. Legt man also an den ersten Kreis in α eine Tangente $\alpha\gamma$ und ist γ der Durchschnittspunct dieser Tangente mit der x Achse, so wird γ das Centrum und $\gamma\alpha$ der Radius des zweiten Kreises sein. Die Gleichungen dieser beiden Kreise werden unmittelbar durch die Formeln (16. a.) und (17. a.) dargestellt, wenn man in denselben für ϑ, ω die Coordinaten ϑ_α, ω_α des gegebenen Punctes α substituirt. Für die Centra γ, δ und für die Radien $\overline{\gamma\alpha}$, $\overline{\delta\alpha}$ dieser Kreise (Fig. 4.) ergeben sich aus jenen Formeln folgende Bestimmungen:

$$(22.)\quad \overline{\gamma O} = a\,\frac{1+e^{2\vartheta_\alpha}}{1-e^{2\vartheta_\alpha}} \qquad \overline{\gamma\alpha} = \mp\,\frac{2ae^{\vartheta_\alpha}}{1-e^{2\vartheta_\alpha}}.$$

$$(23.)\quad \overline{\delta O} = \frac{a}{\operatorname{tg}\omega_\alpha} \qquad \overline{\delta\alpha} = \mp\,\frac{a}{\sin\omega_\alpha}.$$

Zwischen den ω-Coordinaten der Puncte δ und α findet die Relation statt $\omega_\delta = 2\omega_\alpha$, weil zufolge (21.) ω_δ den Centriwinkel $A\delta A'$ und ω_α den Peripheriewinkel $A\alpha A'$ darstellt. Eine ganz analoge Relation findet zwischen den ϑ-Coordinaten der Puncte γ und α statt. Nach (21.) ist nämlich:

$$(*) \qquad e^{\vartheta_\gamma} = \frac{\overline{\gamma A'}}{\overline{\gamma A}} = \frac{\overline{\gamma O} - a}{\overline{\gamma O} + a},$$

andererseits nach (22.):

$$\overline{\gamma O} \,.\, (1 - e^{2\vartheta_\alpha}) = a\,(1 + e^{2\vartheta_\alpha})$$

d. i.

$$(**) \qquad e^{2\vartheta_\alpha} = \frac{\overline{\gamma O} - a}{\overline{\gamma O} + a},$$

also, zufolge (*) und (**): $e^{\vartheta_\gamma} = e^{2\vartheta_\alpha}$ d. i. $\vartheta_\gamma = 2\vartheta_\alpha$. Es gilt daher folgender Satz:

(**24.**) *Alle Puncte, für welche ϑ (oder ω) einen gegebenen constanten Werth hat, liegen auf einem Kreise, in dessen Centrum ϑ (respective ω) einen doppelt so grossen Werth besitzt.*

Die bisher erhaltenen Ergebnisse mögen nun von einem etwas anderen Standpuncte aus betrachtet werden. An Stelle der ϑ-Curven, von denen bis jetzt die Rede war, mögen nämlich die Kugelflächen betrachtet werden, welche von jenen Curven beschrieben werden, falls man die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ Ebene um die x Achse rotiren lässt. Die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ Ebene selber wird man dann als irgend eine Meridianebene dieser Kugelflächen und die ω-Curven als senkrechte Trajectorien derselben ansehen können. Um einige für das Folgende wichtige Eigenschaften dieses Flächensystemes und seiner senkrechten Trajectorien möglichst kurz darlegen zu können, mögen

(**25.**) zwei Puncte in Bezug auf irgend welche Kugelfläche conjugirt genannt werden, wenn beide auf ein und derselben vom Mittelpunct der Kugel ausgehenden geraden Linie liegen und zugleich der Kugel-Radius mittlere Proportionale ist zwischen den Abständen der beiden Puncte vom Kugelmittelpunct.

(**25.a.**) Zunächst sieht man, dass dann die beiden Pole in Bezug

auf jede beliebige der ϑ-Kugelflächen zu einander conjugirt sind (weil nach Fig. 4. $\overline{\gamma A} \cdot \overline{\gamma A'} = \overline{\gamma \alpha}^2$ ist).

Ferner ergeben sich für irgend zwei gegebene Puncte α, β, die in Bezug auf eine gegebene ϑ-Kugelfläche conjugirt sind, folgende Sätze:

(**26. a.**) *Erstens.* Die ω-Coordinaten beider Puncte sind immer einander gleich; es ist also $\omega_\alpha = \omega_\beta$. Oder, was auf dasselbe hinauskommt: Beide Puncte liegen immer auf ein und derselben ω-Curve.

(**26. b.**) *Zweitens.* Die Summe der ϑ-Coordinaten beider Puncte ist gleich der ϑ-Coordinate des Mittelpunctes der gegebenen Kugelfläche; es ist also, falls γ diesen Mittelpunct vorstellt: $\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta = \vartheta_\gamma$.

(**26. c.**) *Drittens.* Die Parameter ξ der beiden Puncte verhalten sich zu einander wie die Quadratwurzeln der Abstände der Puncte vom Mittelpunct der gegebenen Kugelfläche; es ist also $\xi_\alpha : \xi_\beta = \sqrt{\alpha\gamma} : \sqrt{\beta\gamma}$.

(**26. d.**) *Viertens.* Bezeichnet s irgend einen b e l i e b i g e n Punct auf der gegebenen Kugelfläche, also einen Punct, welcher keineswegs mit α und β in derselben Meridianebene zu liegen braucht, so behält das Verhältniss der Abstände des Punctes s von den beiden festen Puncten α und β ein und denselben Werth, wie sich auch s auf der gegebenen Kugelfläche fortbewegen mag. Der Werth dieses Verhältnisses ist nämlich folgender:

$$\overline{s\alpha} : \overline{s\beta} = \sqrt{\gamma\alpha} : \sqrt{\gamma\beta}$$

oder auch (nach 26. c.)

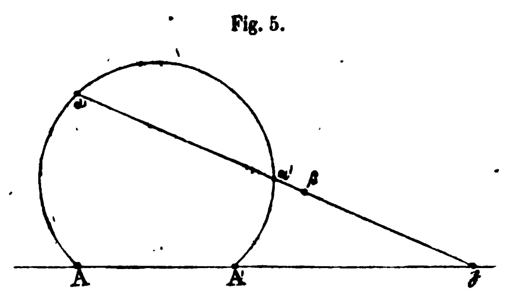
$$\overline{s\alpha} : \overline{s\beta} = \xi_\alpha : \xi_\beta,$$

wo ξ_α, ξ_β die Werthe vorstellen, welche der Parameter ξ in den festen Puncten α und β besitzt.

Der Beweis dieser vier Sätze lässt sich in folgender Weise führen: In Fig. 5 sei zur Ebene der Zeichnung diejenige Meridian-Ebene der ϑ-Kugeln genommen, in welcher sich die gegebenen Puncte α und β befinden; ferner repräsentire daselbst γ den Mittelpunct der gegebenen ϑ-Kugelfläche, in Bezug auf welche α und β zu einander conjugirt sind. Es werden dann (nach 25.) die Puncte α, β, γ in einer geraden Linie liegen, und das Product $\overline{\gamma\alpha} \cdot \overline{\gamma\beta}$ gleich dem Quadrat des Radius der gegebenen Kugelfläche sein. Man construire nun diejenige ω-Curve, welche

durch den einen der beiden gegebenen Puncte z. B. durch α hindurchgeht, d. h. man lege durch α und durch die beiden Pole A, A' einen Kreisbogen und bezeichne denjenigen Punct, in welchem diese Curve von der Linie $\alpha\gamma$ zum zweiten Mal getroffen wird, mit α'. Dann ist nach bekanntem Satz:

Fig. 5.



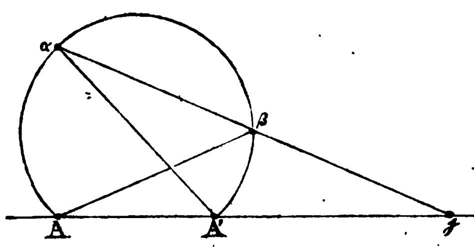
$$\overline{\gamma\alpha}\,.\,\overline{\gamma\alpha'} = \overline{\gamma A}\,.\,\overline{\gamma A'}\,.$$

Das Product $\overline{\gamma A}\,.\,\overline{\gamma A'}$ ist, weil die Pole A, A' (nach 25. a.) in Bezug auf jedwede ϑ-Kugelfläche conjugirt sind, gleich dem Quadrat des Radius der gegebenen ϑ-Kugelfläche. Da demzufolge auch $\overline{\gamma\alpha}\,.\,\overline{\gamma\alpha'}$ gleich dem Quadrat jenes Radius ist, vorhin aber bereits bemerkt war, dass $\overline{\gamma\alpha}\,.\,\overline{\gamma\beta}$ diesen Werth ebenfalls besitzt, so muss β mit α' zusammenfallen. q. e. d. loco 26. a.

Aus den beiden Paaren ähnlicher Dreiecke (Fig. 6.)

$$\Delta\,\beta A\gamma \sim \Delta\,A'\alpha\gamma \qquad \Delta\,\beta A'\gamma \sim \Delta\,A\alpha\gamma$$

Fig. 6.



ergiebt sich, wenn man ihre Seiten proportional setzt:

$$(*)\quad \frac{\beta A}{A'\alpha} = \frac{\beta\gamma}{A'\gamma} = \frac{A\gamma}{\alpha\gamma}, \qquad (**)\quad \frac{\beta A'}{A\alpha} = \frac{\beta\gamma}{A\gamma} = \frac{A'\gamma}{\alpha\gamma}$$

und alsdann durch Division von (*) und (**):

$$\frac{\alpha A'.\,\beta A'}{\alpha A\,.\,\beta A} = \frac{\gamma A'}{\gamma A} = \frac{\gamma A'}{\gamma A}\,.$$

Nun ist aber nach (21.)

$$\frac{\alpha A'}{\alpha A} = e^{\vartheta_\alpha} \qquad \frac{\beta A'}{\beta A} = e^{\vartheta_\beta} \qquad \frac{\gamma A'}{\gamma A} = e^{\vartheta_\gamma},$$

folglich wird:

$$\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta = \vartheta_\gamma \qquad \text{q. e. d. loco 26. b.}$$

Durch Multiplication von (*) und (**) wird:

$$\frac{\beta A \,.\, \beta A'}{\alpha A \,.\, \alpha A'} = \frac{(\beta\gamma)^2}{\gamma A \,.\, \gamma A'} = \frac{\gamma A \,.\, \gamma A'}{(\alpha\gamma)^2},$$

woraus sofort folgt:

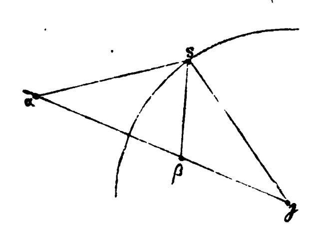
$$\frac{\beta A \,.\, \beta A'}{\alpha A \,.\, \alpha A'} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma}$$

d. i. nach (21.)

$$\frac{\xi_\beta^2}{\xi_\alpha^2} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma}, \qquad \text{q. e. d. loco 26. c.}$$

Es sei s ein ganz beliebiger Punct auf der gegebenen ϑ-Kugelfläche, deren Mittelpunct wiederum mit γ bezeichnet werden mag. Fig. 7. repräsentire die Ebene, welche durch s und durch die festen Puncte α, β, γ hindurchgeht (d. i. eine Ebene, welche gegen die Achse $\gamma A'A$ im Allgemeinen unter irgend welchem Winkel geneigt sein wird). Da nun α, β in Bezug auf die gegebene, durch s gehende ϑ-Kugelfläche conjugirt sind, so ist (nach 25.):

Fig. 7.



$$\overline{\gamma\alpha} \,.\, \overline{\gamma\beta} = \overline{\gamma s}^2$$

oder:

$$\overline{\gamma\alpha} : \overline{\gamma s} = \overline{\gamma s} : \overline{\gamma\beta},$$

also:

$$\Delta\, \alpha s \gamma \sim \Delta\, s\beta\gamma,$$

folglich, wenn man die Seiten proportional setzt:

$$\frac{\alpha s}{s\beta} = \frac{\alpha\gamma}{s\gamma} = \frac{s\gamma}{\beta\gamma},$$

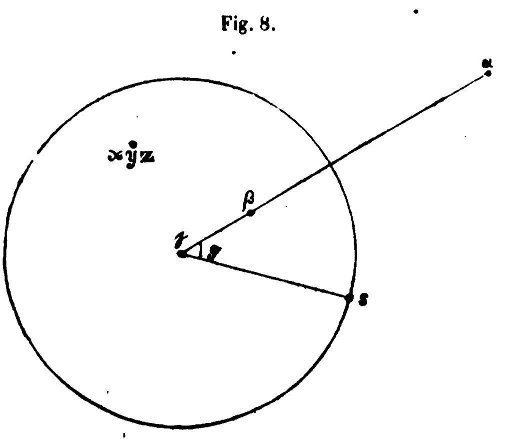
woraus sich sofort ergiebt:

$$\frac{\alpha s}{\beta s} = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}}, \qquad \text{q. e. d. loco 26. d.}$$

§. 3. *Der stationäre Temperaturzustand in einer homogenen Kugel.*

In der Folge soll der stationäre Temperaturzustand in einem homogenen Körper bestimmt werden, welcher von irgend zwei der ϑ-Kugelflächen begrenzt wird. Zu diesem Zwecke ist es aber zunächst erforderlich, eine dieser ϑ-Kugeln näher zu betrachten und den stationären Temperaturzustand zu untersuchen, welcher in dieser Kugel eintritt, sobald dieselbe mit homogener Masse ausgefüllt und die Temperatur für jeden Punct ihrer Oberfläche gegeben ist. Analytisch ausgedrückt, handelt es sich dabei um die Ermittelung einer von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängenden Function V, welche innerhalb der Kugel den Hauptbedingungen (10.) Genüge leistet und an der Oberfläche derselben gegebene Werthe besitzt.

Fig. 8.



Es sei β (Fig. 8.) irgend ein Punct im Innern der Kugelfläche, welcher als fest betrachtet werden mag, und für welchen die Temperatur d. h. der Werth von V ermittelt werden soll. Wir bezeichnen den in Bezug auf die gegebene Kugelfläche zu β conjugirten Punct mit α, ferner die Werthe des Parameters ξ in diesen Puncten mit ξ_β, ξ_α, endlich die reciproken Werthe der Entfernungen, welche ein beliebiger Punct (x, y, z) von β und α besitzt, mit $T_{\beta x}$ und $T_{\alpha x}$, und setzen:

$$(27.) \qquad s_x = \xi_\alpha T_{\alpha x} - \xi_\beta T_{\beta x}.$$

Diese von x, y, z abhängende Function s_x kann dann als das Potential derjenigen Wirkung betrachtet werden, welche der Punct (x, y, z) von zwei Massen ξ_α, ξ_β erleidet, die respective in α und β concentrirt sind, und von denen die eine anziehend, die andere abstossend einwirkt. Stellt s einen beliebigen Punct auf der Kugelfläche vor, so ist nach (26. d.)

$$\xi_\alpha : \xi_\beta = s\alpha : s\beta \quad \text{d. i.} \quad \xi_\alpha T_{\alpha s} - \xi_\beta T_{\beta s} \quad 0,$$

folglich:

$$(28.) \qquad \vartheta_s = 0,$$

d. h. das Potential ϑ_x wird stets Null, sobald der angezogene Punct (x, y, z) in die Oberfläche der Kugel fällt.

Da die unbekannte Function V innerhalb der Kugel den Hauptbedingungen Genüge leisten soll, so ist nach (11.) und (12.):

$$\mathop{\mathrm{S}}\left(T_{\alpha s}\frac{dV_s}{dr} - V_s\frac{dT_{\alpha s}}{dr}\right)ds = 0$$

$$\mathop{\mathrm{S}}\left(T_{\beta s}\frac{dV_s}{dr} - V_s\frac{dT_{\beta s}}{dr}\right)ds = 4\pi V_\beta,$$

wo ds ein Element der Oberfläche der Kugel, r den nach ds hinlaufenden Radius, ferner V_s, V_β die Werthe vorstellen, welche V respective in ds und in β besitzt, und wo die Integration über die ganze Oberfläche der Kugel ausgedehnt ist. Multiplicirt man diese Formel mit den constanten (nämlich den festen Puncten α, β angehörigen) Grössen ξ_α, ξ_β, und subtrahirt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (27.)

$$\mathop{\mathrm{S}}\left(\vartheta_s\frac{dV_s}{dr} - V_s\frac{d\vartheta_s}{dr}\right)ds = -4\pi\xi_\beta V_\beta,$$

also mit Rücksicht auf (28.):

$$(29.) \quad \begin{cases} 4\pi\xi_\beta V_\beta = \mathop{\mathrm{S}} V_s\dfrac{d\vartheta_s}{dr}ds \quad \text{oder} \\ 4\pi\xi_\beta V_\beta = \mathop{\mathrm{S}} V_s\dfrac{d(\xi_\alpha T_{\alpha s} - \xi_\beta T_{\beta s})}{dr}ds. \end{cases}$$

Hiemit ist das gestellte Problem gelöst, nämlich der Werth von V in irgend einem *innern* Puncte β ausgedrückt durch die gegebenen Werthe V_s, welche V *an der Oberfläche* besitzt.

Man kann dieser für V_β gefundenen Formel noch andere Gestalten geben. Bezeichnet man die Abstände der Puncte α, β vom Mittelpunct der Kugel mit r_α, r_β, die Länge des Radius mit r selber, und den Winkel, unter welchem der nach s hinlaufende Radius r gegen die gemeinsame Richtung der Linien r_α, r_β geneigt ist, mit g (Fig. 8.); so ist

$$T_{\alpha s} = \frac{1}{\sqrt{r_\alpha^2 + r^2 - 2r_\alpha r\cos g}},$$

also nach (1.):

$$T_{\alpha s} = \frac{1}{r_\alpha} + \frac{r}{r_\alpha^2} \overset{(1)}{P}(\cos g) + \frac{r^2}{r_\alpha^3} \overset{(2)}{P}(\cos g) + \ldots.$$

und ebenso:

$$T_{\beta s} = \frac{1}{r} + \frac{r_\beta}{r^2} \overset{(1)}{P}(\cos g) + \frac{r_\beta^2}{r^3} \overset{(2)}{P}(\cos g) + \ldots.$$

Demnach wird:

$$\frac{dT_{\alpha s}}{dr} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n r^{n-1}}{r_\alpha^{n+1}} \overset{(n)}{P}(\cos g)$$

$$(*) \qquad \frac{dT_{\beta s}}{dr} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n+1) r_\beta^n}{r^{n+2}} \overset{(n)}{P}(\cos g).$$

Die erste dieser Formeln lässt sich, da α und β in Bezug auf die Kugelfläche conjugirt sind, mithin $r_\alpha r_\beta = r^2$ ist, auch so darstellen:

$$(**) \qquad \frac{dT_{\alpha s}}{dr} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n r_\beta^{n+1}}{r^{n+3}} \overset{(n)}{P}(\cos g).$$

Aus (*) und (**) ergiebt sich durch Multiplication mit $\xi_\beta \xi_\alpha$ und Subtraction:

$$\frac{d(\xi_\alpha T_{\alpha s} - \xi_\beta T_{\beta s})}{dr} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left((n+1)\xi_\beta + n \xi_\alpha \frac{r_\beta}{r}\right) \frac{r_\beta^n}{r^{n+2}} \overset{(n)}{P}(\cos g).$$

Da nun nach (26. c.) $\xi_\alpha : \xi_\beta = \sqrt{r_\alpha} : \sqrt{r_\beta}$ und ausserdem $r_\alpha r_\beta = r^2$ ist, so wird

$$\xi_\alpha = \xi_\beta \sqrt{\frac{r_\alpha}{r_\beta}} = \xi_\beta \frac{r}{r_\beta}.$$

Folglich:

$$\frac{d(\xi_\alpha T_{\alpha s} - \xi_\beta T_{\beta s})}{dr} = \xi_\beta . \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{r_\beta^n}{r^{n+2}} \overset{(n)}{P}(\cos g).$$

Dadurch verwandelt sich die Formel (29.) in:

$$(30.) \quad 4\pi V_\beta = \mathsf{S} \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{r_\beta^n}{r^n} \overset{(n)}{P}(\cos g) \right\} \frac{V_s\, ds}{r^2}.$$

Um endlich der Formel (29.) noch eine dritte Gestalt zu geben, bemerken wir zunächst, dass

$$T_{\alpha s} = \frac{1}{\sqrt{r_\alpha^2 + r^2 - 2 r_\alpha r \cos g}} \qquad T_{\beta s} = \frac{1}{\sqrt{r_\beta^2 + r^2 - 2 r_\beta r \cos g}}$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{dT_{\alpha s}}{dr} = \frac{r_\alpha \cos g - r}{(r_\alpha^2 + r^2 - 2 r_\alpha r \cos g)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{dT_{\beta s}}{dr} = \frac{r_\beta \cos g - r}{(r_\beta^2 + r^2 - 2 r_\beta r \cos g)^{\frac{3}{2}}}$$

oder, wenn man die erste dieser Formeln mit $\frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta}$ d. i. nach (26. c.) mit $\sqrt{\frac{r_\alpha}{r_\beta}}$ multiplicirt:

$$\frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} \frac{dT_{\alpha s}}{dr} = T_{\alpha s}^3 (r_\alpha \cos g - r) \sqrt{\frac{r_\alpha}{r_\beta}}, \quad (*) \quad \frac{dT_{\beta s}}{dr} = T_{\beta s}^3 (r_\beta \cos g - r).$$

Beachtet man nun, dass nach (26. d.)

$$s\alpha : s\beta = \sqrt{r_\alpha} : \sqrt{r_\beta}$$

d. i.

$$T_{s\alpha} \cdot \sqrt{r_\alpha} = T_{s\beta} \cdot \sqrt{r_\beta},$$

ferner, dass

$$r_\alpha r_\beta = r^2$$

ist, so ergiebt sich:

$$r_\alpha = \frac{r^2}{r_\beta} \qquad T_{s\alpha} = T_{s\beta} \sqrt{\frac{r_\beta}{r_\alpha}} = T_{s\beta} \frac{r_\beta}{r};$$

und dadurch verwandelt sich die erste der beiden vorstehenden Formeln in:

$$\frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} \frac{dT_{\alpha s}}{dr} = T_{\beta s}^3 \frac{r_\beta^3}{r^3} \left(\frac{r^2}{r_\beta} \cos g - r \right) \frac{r}{r_\beta}$$

oder:

$$(**) \qquad \frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} \frac{dT_{\alpha s}}{dr} = T_{\beta s}^3 \left(r_\beta \cos g - \frac{r_\beta^2}{r} \right)$$

Aus (*) und (**) folgt durch Subtraction:

$$\frac{1}{\xi_\beta} \frac{d(\xi_\alpha T_{\alpha s} - \xi_\beta T_{\beta s})}{dr} = T_{\beta s}^3 \frac{r^2 - r_\beta^2}{r}.$$

Folglich geht (29.) über in:

$$(31.) \qquad 4\pi V_\beta = \frac{r^2 - r_\beta^2}{r} \mathrm{S} V_s T_{\beta s}^3 ds.$$

Man kann das Problem, um das es sich in diesem §. handelte, entweder durch die Formel (29.) *oder durch* (30.) *oder durch* (31.) *als gelöset betrachten.* Jede dieser Formeln drückt nämlich den Werth, welchen die unbekannte Function V in irgend einem innern Punct β hat, vermittelst der gegebenen Werthe V_s aus, welche dieselbe an der Oberfläche besitzt. *)

---

*) Auf die hier dargelegte Methode habe ich bereits früher in einer kleinen Schrift „Lösung des allg. Problems über den stationären Temperatur-

§. 4. *Der stationäre Temperaturzustand in einer Kugelschale.*

Die Kugelschale (Taf. I.) mag von irgend zweien derjenigen Kugelflächen begrenzt sein, welche in §. 2. betrachtet und dort ϑ-Kugelflächen genannt sind. Die Oberflächen-Elemente mögen für die kleinere Kugelfläche mit $d\sigma$, für die grössere mit ds bezeichnet werden. Der Mittelpunct μ der Kugel $(d\sigma)$ habe die ϑ-Coordinate Θ, und der Mittelpunct m der Kugel (ds) die ϑ-Coordinate T.

Es handelt sich hier um die Ermittelung einer von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängenden Function V, welche im Innern des schalenförmigen Raumes den Hauptbedingungen (10.) Genüge leistet, und an den Flächen $(d\sigma)$ und (ds) beliebig gegebene Werthe besitzt. Wir wollen unter p irgend einen festen Punct verstehen, der im Innern des schalenförmigen Raumes (Taf. I.) beliebig gewählt ist, und uns die Aufgabe stellen, den Werth von V in diesem Puncte p zu finden. Es wird diese Aufgabe ihrer Lösung entgegen geführt werden mit Hülfe eines gewissen Potentiales Ω, welches hier bei der Kugelschale dieselbe Rolle spielt, wie das Potential ε (im vorhergehenden §.) bei einer vollen Kugel. Jedoch bezieht sich dieses Potential hier nicht wie dort auf die Einwirkung zweier Puncte, sondern auf die Einwirkung eines Punctsystemes, welches aus unendlich vielen Puncten besteht. Alle diese Puncte — sie mögen mit a, a'; b, b', c, c' ... bezeichnet werden — sind ihrer Lage nach allein abhängig von der Lage des Punctes p. Sie liegen alle mit p in derselben ω-Curve, d. h. in der Peripherie eines Kreisbogens, welcher durch p und durch die beiden Pole A, A' gelegt ist. Die Lage der Puncte a, a' auf dieser ω-Curve wird erhalten, wenn man p mit den Mittelpuncten m, μ durch gerade Linien verbindet, und diese so weit verlängert, bis dieselben die ω-Curve zum zweiten Mal schneiden. Sodann werden b, b' dadurch erhalten, dass man a, a' mit den Mittelpuncten μ, m verbindet, und die Verbindungslinien wiederum soweit ver-

---

Zustand einer homogenen Kugel" (Halle, Verlag von Schmidt, 1861) aufmerksam gemacht; und daselbst zugleich einige neue Sätze angegeben, welche die in Rede stehende Methode für die Theorie der Anziehung liefert.

längert, bis sie jene ω-Curve zum zweiten Mal schneiden. Aehnlich ergeben sich c, c', dann d, d' u. s. w. (siehe Taf. I.). Die Bezeichnung der Puncte mag dabei der Art gewählt werden, dass a, b, c, d ... sämmtlich auf demjenigen Theile der ω-Curve liegen, welcher sich zwischen p und A befindet, und andererseits a', b', c', d' ... sämmtlich auf demjenigen Theile liegen, welcher sich zwischen p und A' befindet. Denkt man sich die Construction dieser Puncte ins Unendliche hin fortgesetzt, so werden sich die Puncte der Gattung a, b, c ... dem Pole A, und die Puncte der Gattung a', b' c' ... dem Pole A' ins Unendliche nähern. Ferner erkennt man aus der Construction sofort, dass alle Puncte a, a', b, b', c, c' ... ausserhalb der gegebenen Kugelschale sich befinden, nämlich theils in dem von der Schale umschlossenem Innenraum, theils in dem die Schale umgebendem Aussenraum liegen. Die ϑ- und ω-Coordinaten dieser Puncte lassen sich leicht ausdrücken durch ϑ_p und ω_p, d. i. durch die ϑ- und ω-Coordinate des Punctes p.

Da nämlich zunächst alle mit p auf derselben ω-Curve liegen, so ist auch die ω-Coordinate bei allen $= \omega_p$.

Was ferner die ϑ-Coordinaten anbelangt, so erkennt man aus Taf. I. sofort, dass $\overline{pm} \, . \, \overline{am} = r^2$ ist, falls r den Radius der Kugel (ds) vorstellt, dass also p und a in Bezug auf diese Kugel zu einander conjugirt (25.) sind. Allgemeiner: es ergiebt sich, dass jedes der Punctpaare

$$p,a \quad a',b \quad b',c \quad c',d \quad \text{etc.}$$

in Bezug auf die Kugelfläche (ds), und jedes der Punctpaare

$$p,a' \quad a,b' \quad b,c' \quad c,d' \quad \text{etc.}$$

in Bezug auf die Kugelfläche $(d\sigma)$ conjugirt ist. Beachtet man daher, dass die ϑ-Coordinaten der Mittelpuncte μ und m mit Θ und T bezeichnet sind, so ergiebt sich aus (26. b.) sofort:

$$T = \vartheta_p + \vartheta_a = \vartheta_{a'} + \vartheta_b = \vartheta_{b'} + \vartheta_c = \vartheta_{c'} + \vartheta_d = \text{etc.}$$
$$\Theta = \vartheta_p + \vartheta_{a'} = \vartheta_a + \vartheta_{b'} = \vartheta_b + \vartheta_{c'} = \vartheta_c + \vartheta_{d'} = \text{etc.}$$

Daraus aber folgt:

$$
(32.)\left\{\begin{array}{ll}
\vartheta_a = T - \vartheta_p & \vartheta_{a'} = \Theta - \vartheta_p \\
\vartheta_{b'} = \Theta - T + \vartheta_p & \vartheta_b = T - \Theta + \vartheta_p \\
\vartheta_c = 2T - \Theta - \vartheta_p & \vartheta_{c'} = 2\Theta - T - \vartheta_p \\
\vartheta_{d'} = 2\Theta - 2T + \vartheta_p & \vartheta_d = 2T - 2\Theta + \vartheta_p \\
\vartheta_e = 3T - 2\Theta - \vartheta_p & \vartheta_{e'} = 3\Theta - 2T - \vartheta_p \\
\vartheta_{f'} = 3\Theta - 3T + \vartheta_p & \vartheta_f = 3T - 3\Theta + \vartheta_p \\
\vartheta_g = 4T - 3\Theta - \vartheta_p & \vartheta_{g'} = 4\Theta - 3T - \vartheta_p \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}\right.
$$

Wird nun der Parameter ξ des Punctes p d. i. (nach 20. 21.) das geometrische Mittel der beiden Pol-Abstände $\overline{pA}$, $\overline{pA'}$ mit ξ_p, und werden desgleichen die Parameter von a, a', b, b'... mit ξ_a, $\xi_{a'}$, ξ_b, $\xi_{b'}$... bezeichnet, so soll das vorhin erwähnte Potential Ω oder Ω_x sich auf diejenige Wirkung beziehen, welche ein beliebiger Punct (x, y, z) von den *festen* Puncten p, a, a', b, b', c, c', d, d', ... erleidet, falls in diesen letztern Massen von der Grösse ξ_p, $-\xi_a$, $-\xi_{a'}$, ξ_b, $\xi_{b'}$, $-\xi_c$, $-\xi_{c'}$, ξ_d, $\xi_{d'}$... concentrirt gedacht werden, Stellt also, wie früher, $T_{\alpha\beta}$ den reciproken Werth der Entfernung zweier Puncte α, β vor, so soll Ω_x folgende Bedeutung haben:

$$(33.)\quad \Omega_x = \xi_p T_{px} - (\xi_a T_{ax} + \xi_{a'} T_{a'x}) + (\xi_b T_{bx} + \xi_{b'} T_{b'x}) - + \ldots$$

eine Formel, der man auch folgende beide andere Gestalten geben kann:

$$(33.\,a.)\quad \Omega_x = (\xi_p T_{px} - \xi_a T_{ax}) - (\xi_{a'} T_{a'x} - \xi_b T_{bx}) + (\xi_{b'} T_{b'x} - \xi_c T_{cx}) - + \ldots$$

$$(33.\,b.)\quad \Omega_x = (\xi_p T_{px} - \xi_{a'} T_{a'x}) - (\xi_a T_{ax} - \xi_{b'} T_{b'x}) + (\xi_b T_{bx} - \xi_{c'} T_{c'x}) - + \ldots$$

Dass diese sich ins Unendliche hin erstreckenden Reihen convergent sind, ergiebt sich leicht. Bedeuten nämlich u und u' zwei Puncte, welche respective in der Reihe a, b, c... und in der Reihe a' b', c'... eine unendlich ferne Stelle einnehmen, also zwei Puncte, welche respective dem Pole A und dem Pole A' unendlich nahe liegen, so wird

$$(*)\qquad \xi_u T_{ux} + \xi_{u'} T_{u'x}$$

ein Glied der Reihe (33.) vorstellen, welches in derselben eine unendlich ferne Stelle einnimmt. Der Werth dieses Ausdrucks (*) ist aber der Null unendlich nahe, weil die Parameter ξ_u, $\xi_{u'}$ (zufolge 21.) mit den unendlich kleinen Factoren $\sqrt{\overline{uA}}$, $\sqrt{\overline{u'A'}}$ behaftet sind. Da demnach der Werth des in der Reihe (33.) vorkommenden allgemeinen Gliedes gegen Null

convergirt, falls seine Stellenzahl unendlich gross wird, und ausserdem die Glieder der Reihe alternirendes Vorzeichen besitzen, so ist die Convergenz derselben ausser Zweifel.

(**34.**) Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass dieses Potential Ω_x verschwindet, sobald der angezogene Punct (x, y, z) an irgend welche Stelle der innern oder äussern Oberfläche der Schale zu liegen kommt, also nachweisen, dass $\Omega_s = 0$ und $\Omega_\sigma = 0$ ist, falls s den Ort irgend eines Elementes ds, und σ den irgend eines Elementes $d\sigma$ vorstellt. Dass $\Omega_s = 0$ ist, ergiebt sich nämlich aus (33. a.) sofort, wenn man beachtet, dass jedes der Punctpaare

$$p, a \quad a', b \quad b', c \quad \text{etc.}$$

in Bezug auf die Kugelfläche (ds) conjugirt ist, dass daher (nach 26. d.)

$$\xi_p T_{ps} = \xi_a T_{as}, \quad \xi_{a'} T_{a's} = \xi_b T_{bs}, \quad \xi_{b'} T_{b's} = \xi_c T_{cs}, \quad \text{etc.}$$

ist, und dass demzufolge in (33. a.) sämmtliche Glieder der rechten Seite verschwinden, sobald der Punct (x, y, z) in die Stelle s fällt. In ganz analoger Weise ergiebt sich, dass $\Omega_\sigma = 0$ ist, aus (33. b.), wenn man beachtet, dass jedes der Punctpaare

$$p, a' \quad a, b' \quad b, c' \quad \text{etc.}$$

in Bezug auf die Kugelfläche $(d\sigma)$ conjugirt ist, und dass daher (nach 26. d.)

$$\xi_p T_{p\sigma} = \xi_{a'} T_{a'\sigma}, \quad \xi_a T_{a\sigma} = \xi_{b'} T^{b'\sigma}, \quad \xi_b T_{b\sigma} = \xi_{c'} T_{c'\sigma}, \quad \text{etc.}$$

ist. Nunmehr mag die Reihe (33.) zur Abkürzung in folgender Weise dargestellt werden:

$$(\mathbf{35.}) \qquad \Omega_x = \xi_p T_{px} + \Sigma \pm \xi_q T_{qx}$$

wo q irgend einen der Puncte $a, a', b, b', c, c', \ldots$ vorstellen soll, also Puncte repräsentirt, welche sämmtlich a u s s e r h a l b des gegebenen schalenförmigen Raumes liegen, während p sich i n n e r h a l b desselben befindet.

Beachtet man diese Lage der p und q und beachtet man ferner, dass die unbekannte Function V innerhalb des schalenförmigen Raumes den Hauptbedingungen Genüge leisten soll, so ergiebt sich aus (12.):

$$\mathrm{S}\left(T_{po}\frac{dV_o}{dN} - V_o\frac{dT_{po}}{dN}\right)do = 4\pi\, V_p$$

$$\mathrm{S}\left(T_{qo}\frac{dV_o}{dN} - V_o\frac{dT_{qo}}{dN}\right)do = 0,$$

wo *do* irgend ein Element einer der beiden Begrenzungsflächen der Schale, und *N* die darauf errichtete aus der Schale in den angrenzenden Raum hineinlaufende Normale vorstellt, wo ferner die Integration über beide Begrenzungsflächen ausgedehnt ist, und wo *o* den Ort des Elementes *do* bezeichnet, also V_o z. B. den Werth vorstellt, welchen V in *do* besitzt, während V_p den Werth von V im Puncte p bezeichnet. Denkt man sich von diesen beiden Formeln die *letztere* der Reihe nach für *sämmtliche* Puncte q aufgestellt, jede derselben mit $\pm\ \xi_q$ multiplicirt, und die *erste* mit ξ_p multiplicirt, so ergiebt sich durch Addition aller dieser Formeln, mit Rücksicht auf (35.):

$$\int\left(\Omega_o\frac{dV_o}{dN}-V_o\frac{d\Omega_o}{dN}\right)do=4\pi\,\xi_p\,V_p$$

oder, da Ω (zufolge 34.) sowohl auf der innern, als auch auf der äussern Begrenzungsfläche der Schale verschwindet, also $\Omega_o=0$ ist:

$$(35.\ a.)\qquad 4\pi\,\xi_p\,V_p=-\int V_o\frac{d\Omega_o}{dN}do.$$

Sondert man das Integral rechter Hand in den auf die äussere Grenzfläche (ds) und in den auf die innere Grenzfläche ($d\sigma$) bezüglichen Theil, und beachtet man, dass von den Radien r und ϱ dieser beiden Kugelflächen der erstere die mit N gleiche, der letztere die mit N entgegengesetzte Richtung repräsentirt, so ergiebt sich:

$$(36.)\quad 4\pi\,\xi_p\,V_p=-\int V_s\frac{d\Omega_s}{dr}ds+\int V_\sigma\frac{d\Omega_\sigma}{d\varrho}d\sigma.$$

Diese Formel enthält bereits die vollständige Lösung der gestellten Aufgabe, macht nämlich den Werth der unbekannten Temperatur V im Puncte p abhängig einerseits von den gegebenen Temperaturen V_s, V_σ an der äusseren und inneren Grenzfläche, andererseits von einer Function Ω (33.), deren Bildungsweise vollständig bekannt ist.

Durch Substitution des Werthes von Ω (33.) lässt sich diese Formel noch weiter entwickeln. Bezeichnet man für den Fall, dass α, β irgend zwei feste, in Bezug auf $\left\{\begin{matrix}\text{die Kugelfläche } (ds)\\ \text{oder die Kugelfläche } (d\sigma)\end{matrix}\right\}$ conjugirte Puncte sind, und unter der Voraussetzung, dass α *ausserhalb*, β *inner*-

halb der Kugelfläche liegt, mit $\left\{ \begin{matrix} [\alpha, \beta]_s \\ \text{oder } [\alpha, \beta]_\sigma \end{matrix} \right\}$ folgenden von α, β selber und von der Lage des beliebigen Oberflächen-Elementes $\left\{ \begin{matrix} ds \\ \text{oder } d\sigma \end{matrix} \right\}$ abhängenden Ausdruck:

$$(37.) \quad \begin{cases} [\alpha, \beta]_s = \xi_\alpha T_{\alpha s} - \xi_\beta T_{\beta s} \\ [\alpha, \beta]_\sigma = \xi_\alpha T_{\alpha\sigma} - \xi_\beta T_{\beta\sigma}, \end{cases}$$

so lassen sich die Reihen (33. a.) und (33. b.), falls man den Punct (x, y, z) bei der einen in die Fläche (ds), bei der andern in die Fläche $(d\sigma)$ fallen lässt, in folgender Weise darstellen:

$$\Omega_s = -[a, p]_s + [b, a']_s - [c, b']_s + [d, c']_s - [e, d']_s + - \ldots$$

$$\Omega_\sigma = +[p, a']_\sigma - [a, b']_\sigma + [b, c']_\sigma - [c, d']_\sigma + [d, e']_\sigma - + \ldots$$

Durch Substitution dieser Werthe in die beiden Integrale der Formel (36.) ergiebt sich:

$$(38.) \quad \begin{cases} \mathsf{S}\, V_s \dfrac{d\Omega_s}{dr} ds = -\mathsf{S}\, V_s \dfrac{d[a, p]_s}{dr} ds + \mathsf{S}\, V_s \dfrac{d[b, a']_s}{dr} ds - \ldots. \\ \mathsf{S}\, V_\sigma \dfrac{d\Omega_\sigma}{d\varrho} d\sigma = +\mathsf{S}\, V_\sigma \dfrac{d[p, a']_\sigma}{d\varrho} d\sigma - \mathsf{S}\, V_\sigma \dfrac{d[a, b']_\sigma}{d\varrho} d\sigma + \ldots. \end{cases}$$

Diese Formeln lassen sich vereinfachen durch *Betrachtung zweier für den Augenblick fingirter Fälle;* nämlich einerseits durch Betrachtung desjenigen stationären Temperaturzustandes F, welcher in der grösseren Kugel (ds) eintreten würde, falls dieselbe vollständig mit homogener Masse ausgefüllt ist und an der Oberfläche in derjenigen Temperatur erhalten wird, welche für sie als äussere Begrenzungsfläche der Schale gegeben und mit V_s bezeichnet ist; andererseits durch Betrachtung desjenigen stationären Temperaturzustandes Φ, welcher in der kleineren Kugel $(d\sigma)$ eintreten würde, falls dieselbe wiederum mit homogener Masse ausgefüllt und an der Oberfläche in derjenigen Temperatur V_σ erhalten gedacht wird, welche für sie als innere Begrenzungsfläche der Schale gegeben ist. Bezeichnet, was den ersten Fall anbelangt, β irgend welchen Punct im Innern der Kugel (ds), F_β die daselbst vorhandene unbekannte Temperatur, und α den in Bezug auf (ds) zu β conjugirten Punct, so ist nach (29.) und mit Benutzung der in (37.) eingeführten Abkürzung:

$$(*) \qquad 4\pi\, \xi_\beta F_\beta = \int V_s \frac{d\,[\alpha,\beta]_s}{dr}\, ds.$$

Bezeichnet ferner, was den zweiten Fall anbelangt, β irgend einen Punct im Innern der Kugel $(d\sigma)$, Φ_β die daselbst vorhandene unbekannte Temperatur, und α den in Bezug auf $(d\sigma)$ zu β conjugirten Punct, so ist wiederum nach (29.) und (37.):

$$(**) \qquad 4\pi\, \xi_\beta\, \Phi_\beta = \int V_\sigma \frac{d[\alpha,\beta]_\sigma}{d\varrho}\, d\sigma.$$

Durch Anwendung von (*) und (**) verwandeln sich nun die Formeln (38.) in:

$$\int V_s \frac{d\Omega_s}{dr}\, ds = 4\pi\,(-\xi_p F_p + \xi_{a'} F_{a'} - \xi_{b'} F_{b'} + \xi_{c'} F_{c'} - + \ldots)$$

$$\int V_\sigma \frac{d\Omega_\sigma}{d\varrho}\, d\sigma = 4\pi\,(\xi_{a'}\Phi_{a'} - \xi_{b'}\Phi_{b'} + \xi_{c'}\Phi_{c'} - \xi_{d'}\Phi_{d'} + - \ldots)$$

Somit ergiebt sich aus (36.) für V_p schliesslich folgender Werth:

$$(39.) \qquad \xi_p V_p = \xi_p F_p - \xi_{a'}(F_{a'} - \Phi_{a'}) + \xi_{b'}(F_{b'} - \Phi_{b'}) \\ - \xi_{c'}(F_{c'} - \Phi_{c'}) + - \ldots.$$

Um also die Temperatur V_p in irgend einem Puncte p der gegebenen Schale zu bestimmen, hat man durch p und durch die beiden Pole A, A' einen Kreis zu legen, und auf demjenigen Theile dieser Kreisperipherie, welcher zwischen p und A' liegt (Taf. I.), nach einem gewissen Gesetz Puncte a', b', c', d'... zu construiren. Sodann hat man die Temperaturen F_p, $F_{a'}$, $F_{b'}$ ... zu ermitteln, welche in p, a', b'... eintreten würden, falls der betrachtete Körper allein von der grösseren Kugelfläche (ds) begrenzt, und an dieser seiner Begrenzungsfläche in der für dieselbe gegebenen Temperatur erhalten würde; ferner die Temperaturen $\Phi_{a'}$, $\Phi_{b'}$, ... zu ermitteln, welche in a', b'.... stattfinden würden, falls der betrachtete Körper aus einer von der kleinern Kugelfläche (dσ) umschlossenen Kugel bestände, und an dieser seiner Begrenzungsfläche wiederum in der für dieselbe gegebenen Temperatur erhalten würde. Die gesuchte Temperatur V_p lässt sich dann durch die F und Φ und durch die geometrischen

Mittel ξ der beiden Polabstände, welche jeder der Puncte p, a', b', ... besitzt, in der Weise darstellen, wie es die Formel (39.) *angiebt.*

Sehr schön lässt sich diese Darstellung verwenden, um die Temperatur V_p dann zu bestimmen, wenn die Temperatur auf der äusseren Oberfläche der Schale überall *denselben*, und die auf der innern Oberfläche ebenfalls überall *denselben* aber einen *andern* Werth besitzt, wenn also V_s gleich einer Constanten C, und V_σ gleich irgend einer andern Constanten Γ ist. Alsdann sind nämlich, wie man sofort erkennt, die den beiden fingirten Fällen entsprechenden Temperaturen F und Φ, die erstere überall $= C$, und die letztere überall $= \Gamma$; so dass die Formel (39.) folgendes Resultat liefert:

$$(40.)\qquad V_p = C + (\Gamma - C)\,.\,\frac{\xi_{a'} - \xi_{b'} + \xi_{c'} - \xi_{d'} + - \ldots}{\xi_p}$$

oder:

$$(40.a.)\qquad V_p = C + (\Gamma - C)\,.\,\frac{(\xi_{a'} + \xi_{c'} + \xi_{e'} + ..) - (\xi_{b'} + \xi_{d'} + \xi_{f'} + ...)}{\xi_p}$$

eine Formel, welche später noch weiter entwickelt werden soll.

Eine andere Darstelluug des im Allgemeinen für V_p gefundenen Werthes (39.) lässt sich dadurch gewinnen, dass man die Bedeutung beachtet, welche die Functionen F und Φ für die vollen Kugeln (ds) und $(d\sigma)$ besitzen und dieser Bedeutung gemäss F und Φ vermittelst der Formeln (30.) oder (31.) darstellt. Für irgend einen innerhalb der Kugel (ds) gelegenen Punct β ist nämlich nach jenen Formeln:

$$(41.)\qquad F_\beta = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{(2n+1)\, r_\beta^n}{4\pi\,.\, r^{n+2}} \,.\, \mathop{\mathsf{S}} \overset{(n)}{P}_{\beta s} V_s\, ds \right) = \frac{r^2 - r_\beta^2}{4\pi r} \mathop{\mathsf{S}} T_{\beta s}^3 V_s\, ds,$$

wo r den Radius der Kugel (ds), und r_β den Abstand bezeichnet, welchen der innere Punct β vom Mittelpunct m der Kugel hat, und wo ferner $\overset{(n)}{P}_{\beta s}$ folgenden von der relativen Lage der drei Puncte m, β, ds abhängenden Werth

$$\overset{(n)}{P}_{\beta s} = \overset{(n)}{P} \left(\cos \widehat{\beta\, m\, ds}\right)$$

vorstellt, unter $\widehat{\beta\, m\, ds}$ der Winkel verstanden, unter welchem zwei von m nach β und nach ds gezogene Linien gegeneinander geneigt sind. Andererseits ergiebt sich, wenn β irgend einen Punct im Innern der Kugel $(d\sigma)$ vorstellt, für Φ_β aus (30.) und (31.) folgender Werth:

$$(42.)\quad \Phi_\beta = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{(2n+1)\varrho_\beta^n}{4\pi\varrho^{n+2}}.\mathsf{S}\overset{(n)}{\Pi}_{\beta\sigma}V_\sigma d\sigma\right) = \frac{\varrho^2-\varrho_\beta^2}{4\pi\varrho}\mathsf{S}T_{\beta\sigma}^3 V_\sigma d\sigma,$$

wo ϱ den Radius der Kugel $(d\sigma)$, ϱ_β den Abstand zwischen β und dem Mittelpunct μ derselben vorstellt, und wo

$$\overset{(n)}{\Pi}_{\beta\sigma} = \overset{(n)}{P}\left(\cos\widehat{\beta\mu d\sigma}\right)$$

von der relativen Lage der Puncte μ, β, $d\sigma$ ebenso abhängt, wie $\overset{(n)}{P}_{\beta s}$ von der der Puncte m, β, ds.

Durch Substitution dieser Werthe (41.), (42.) ergiebt sich nun aus (39.) folgende neue Darstellung der Temperatur V_p:

$$(43.)\qquad V_p = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\left(\frac{L^{(n)}}{r^{n+2}} - \frac{\Lambda^{(n)}}{\varrho^{n+2}}\right),$$

wo:

$$\xi_p L^{(n)} = \mathsf{S}\left(\xi_p r_p^n P_{ps}^{(n)} - \xi_{a'} r_{a'}^n P_{a's}^{(n)} + \xi_{b'} r_{b'}^n P_{b's}^{(n)} - + \ldots\right) V_s ds$$

$$\xi_p \Lambda^{(n)} = \qquad \mathsf{S}\left(-\xi_{a'}\varrho_{a'}^n \Pi_{a'\sigma}^{(n)} + \xi_{b'}\varrho_{b'}^n \Pi_{b'\sigma}^{(n)} - + \ldots\right) V_\sigma d\sigma;$$

oder auch folgende dritte Darstellung:

$$(44.)\quad V_p = \begin{cases} + \dfrac{r^2-r_p^2}{4\pi r}\mathsf{S}T_{ps}^3 V_s ds \\ -\left(\dfrac{\xi_{a'}}{\xi_p}\dfrac{r^2-r_{a'}^2}{4\pi r}\mathsf{S}T_{a's}^3 V_s ds - \dfrac{\xi_{b'}}{\xi_p}\dfrac{r^2-r_{b'}^2}{4\pi r}\mathsf{S}T_{b's}^3 V_s ds + - \ldots\right) \\ + \left(\dfrac{\xi_{a'}}{\xi_p}\dfrac{\varrho^2-\varrho_{a'}^2}{4\pi\varrho}\mathsf{S}T_{a'\sigma}^3 V_\sigma d\sigma - \dfrac{\xi_{b'}}{\xi_p}\dfrac{\varrho^2-\varrho_{b'}^2}{4\pi\varrho}\mathsf{S}T_{b'\sigma}^3 V_\sigma d\sigma + - \ldots\right)\end{cases}$$

§. 5. *Nähere Untersuchung des Falles, dass die für die beiden Oberflächen der Schale gegebene Temperatur auf jeder derselben an allen Stellen gleich gross ist.*

Die für diesen Fall in (40.) gefundene Formel kann dadurch weiter entwickelt werden, dass man die Werthe der Parameter ξ durch die Coordinaten ϑ, ω ausdrückt. Für irgend einen Punct α ist (nach 21.)

$$(*)\qquad \xi = \sqrt{\overline{\alpha A}.\overline{\alpha A'}}.$$

Nun ist, wenn $\mathfrak{y}$ den Abstand des Punctes α von der Linie AOA', und x den Abstand desselben von der in O gegen AOA' senkrechten Ebene vorstellt, x und $\mathfrak{y}$ also die in einer durch α gelegten Meridian-Ebene gemessenen rechtwinkligen Coordinaten von α sind:

$$\overline{\alpha A}^2 = (x + a)^2 + \mathfrak{y}^2$$
$$\overline{\alpha A'}^2 = (x - a)^2 + \mathfrak{y}^2$$

oder:

$$\overline{\alpha A}^2 = (x + i\mathfrak{y} + a)(x - i\mathfrak{y} + a)$$
$$\overline{\alpha A'}^2 = (x + i\mathfrak{y} - a)(x - i\mathfrak{y} - a)$$

und daher (nach 15.):

$$\overline{\alpha A}^2 = \frac{2a}{1 - e^{\vartheta + i\omega}} \cdot \frac{2a}{1 - e^{\vartheta - i\omega}}$$
$$\overline{\alpha A'}^2 = \frac{2a e^{\vartheta + i\omega}}{1 - e^{\vartheta + i\omega}} \cdot \frac{2a e^{\vartheta - i\omega}}{1 - e^{\vartheta - i\omega}}$$

Demnach ergiebt sich aus (*):

$$\xi = \frac{2a\sqrt{e^{\vartheta}}}{\sqrt{(1 - e^{\vartheta + i\omega})(1 - e^{\vartheta - i\omega})}}$$

oder:

$$(45.) \qquad \xi = \frac{2a}{\sqrt{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}}.$$

Die ω-Coordinaten der in (40.) vorkommenden Puncte $p, a', b', c' \ldots$ haben sämmtlich ein und dieselbe Grösse, sind nämlich sämmtlich $= \omega_p$, und ihre ϑ-Coordinaten nach (32.) folgende:

$$(46.) \begin{cases} \vartheta_{b'} = \vartheta_p + \varDelta & \vartheta_{a'} = \Theta - \vartheta_p \\ \vartheta_{d'} = \vartheta_p + \varDelta + \varDelta & \vartheta_{c'} = \Theta - \vartheta_p + \varDelta \\ \vartheta_{f'} = \vartheta_p + \varDelta + 2\varDelta & \vartheta_{e'} = \Theta - \vartheta_p + 2\varDelta \\ \vartheta_{h'} = \vartheta_p + \varDelta + 3\varDelta & \vartheta_{g'} = \Theta - \vartheta_p + 3\varDelta \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

wo zur Abkürzung $\Theta - T = \varDelta$ gesetzt ist. Bildet man daher die Werthe von ξ_p , ξ , $\xi_{b'} \ldots$ der Formel (45.) gemäss, und bezeichnet man dabei die Coordinaten ϑ_p, ω_p des Punctes p kürzer mit ϑ, ω selber, so ergiebt sich:

$$(47.) \begin{cases} \xi_p = \dfrac{2a}{\sqrt{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}} \\ \xi_{a'} + \xi_{c'} + \xi_{e'} + \ldots = \displaystyle\sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{2a}{\sqrt{e^{\Theta - \vartheta + h\varDelta} + e^{-(\Theta - \vartheta + h\varDelta)} - 2\cos\omega}} \\ \xi_{b'} + \xi_{d'} + \xi_{f'} + \ldots = \displaystyle\sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{2a}{\sqrt{e^{\vartheta + \varDelta + h\varDelta} + e^{-(\vartheta + \varDelta + h\varDelta)} - 2\cos\omega}} \end{cases}$$

Ist δ irgend welche negative Grösse, so gilt nach (1. a.) folgende convergente Entwickelung:

$$(48.)\qquad \frac{1}{\sqrt{e^{\delta}+e^{-\delta}-2\cos\omega}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}\delta} \overset{(n)}{P}(\cos\omega).$$

Die in den Formeln (47.) vorkommenden Exponenten von e

$$\vartheta, \qquad \Theta-\vartheta+h\varDelta, \qquad \vartheta+\varDelta+h\varDelta$$

repräsentiren die ϑ-Coordinaten der Puncte p, a', b', $c'\dots$, also die ϑ-Coordinaten von Puncten, welche sämmtlich rechts von der in O gegen AOA' senkrechten Ebene liegen (Taf. I.), und sind daher (nach 21. a.) sämmtlich negativ. Demnach ergiebt sich durch Anwendung der Formel (48.) auf die Ausdrücke (47.):

$$\xi_{a'}+\xi_{c'}+\xi_{e'}+\dots = 2a \sum_{h=0}^{h=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}(\Theta-\vartheta+h\varDelta)} \overset{(n)}{P}(\cos\omega)$$

$$\xi_{b'}+\xi_{d'}+\xi_{f'}+\dots = 2a \sum_{h=0}^{h=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta+\varDelta+h\varDelta)} \overset{(n)}{P}(\cos\omega)$$

oder wenn man die Summation nach h vermittelst der Formel

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} e^{h\delta} = \frac{1}{1-e^{\delta}}$$

bewerkstelligt:

$$\xi_{a'}+\xi_{c'}+\xi_{e'}+\dots = 2a \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(\Theta-\vartheta)}}{1-e^{\frac{2n+1}{2}\varDelta}} \overset{(n)}{P}(\cos\omega)$$

$$\xi_{b'}+\xi_{d'}+\xi_{f'}+\dots = 2a \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(\varDelta+\vartheta)}}{1-e^{\frac{2n+1}{2}\varDelta}} \overset{(n)}{P}(\cos\omega).$$

Hierdurch und durch Substitution des Werthes von ξ_p aus (47.) verwandelt sich der für die Temperatur V_p gefundene Werth (40. a.) in:

(49.)

$$V_p = C+(\Gamma-C)\sqrt{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(\Theta-\vartheta)}-e^{\frac{2n+1}{2}(\varDelta+\vartheta)}}{1-e^{\frac{2n+1}{2}\varDelta}} \overset{(n)}{P}(\cos\omega)$$

Man kann leicht nachweisen, dass diese Reihe stets convergent ist.

Man bezeichne zu diesem Zweck die in O gegen die Linie AOA' senkrechte Ebene mit E, und betrachte sämmtliche ϑ-Kugelflächen, die rechts von E liegen (Taf. I.). Dieses Flächensystem wird den ganzen rechts von E befindlichen Raum stetig erfüllen; es beginnt dasselbe mit Kugeln, welche den Pol A' unendlich enge umschliessen, erweitert sich dann mehr und mehr, der Art, dass jede neue Kugel die vorhergehende umhüllt, und endet schliesslich mit derjenigen unendlich grossen Kugelfläche, welche durch die Ebene E selber dargestellt wird. Während eine in dieser Weise sich allmählig mehr und mehr-erweiternde ϑ-Kugelfläche von der unendlich kleinen Kugel A' zur unendlich grossen Kugel E übergeht, wird gleichzeitig ihr Parameter ϑ *von* $-\infty$ *bis* 0 *stetig wachsen* (vergl. 20. und 21.). Da nun p einen Punct vorstellt, welcher zwischen den beiden Grenzflächen $(d\sigma)$ und (ds) der hier untersuchten Schale liegt, so wird jene von A' bis E hin sich allmählig erweiternde ϑ-Kugelfläche bei einem gewissen Stadium ihres Wachsthumes mit der innern Begrenzungsfläche $(d\sigma)$ zusammenfallen, sodann bei weiterem Anwachsen eine Lage erhalten, bei welcher sie durch den Punct p hindurchgeht, und endlich bei noch weiter vorgeschrittenem Wachsthum mit der äusseren Begrenzungsfläche (ds) coïncidiren. Daraus folgt:

$$(*)\qquad -\infty < \vartheta_\sigma < \vartheta_p < \vartheta_s < 0,$$

wo ϑ_σ, ϑ_s die Parameter der beiden Begrenzungsflächen $(d\sigma)$ und (ds) vorstellen sollen, und ϑ_p die ϑ-Coordinate des Punctes p bezeichnet. Setzt man nun wieder ϑ für ϑ_p und beachtet man, dass Θ, T die ϑ-Coordinaten der Mittelpuncte der Kugelflächen $(d\sigma)$ und (ds) vorstellen, dass also (zufolge 24.)

$$(\mathbf{50.})\qquad \Theta = 2\vartheta_\sigma \qquad T = 2\vartheta_s$$

ist, so verwandeln sich die eben aufgestellten Relationen (*) in:

$$-\infty < \frac{\Theta}{2} < \vartheta < \frac{T}{2} < 0.$$

(**50. a.**) Daraus aber folgt sofort, dass die drei Grössen

$$\varDelta = \Theta - T, \qquad \Theta - \vartheta, \qquad \varDelta + \vartheta$$

sämmtlich negativ sind. Die in (49.) vorkommende Reihe besitzt daher folgende Gestalt:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^{\frac{2n+1}{2}} - \beta^{\frac{2n+1}{2}}}{1-\gamma^{\frac{2n+1}{2}}} \overset{(n)}{P}(\cos\omega),$$

wo α, β, γ lauter ächte Brüche sind. Dass diese Reihe convergent ist, erhellt nun sofort, wenn man beachtet, dass die Reihen

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha^{\frac{2n+1}{2}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \beta^{\frac{2n+1}{2}}$$

convergiren, und dass (man sehe No. 99.) der Ausdruck

$$\frac{\overset{(n)}{P}(\cos\omega)}{1-\gamma^{\frac{2n+1}{2}}}$$

bei wachsendem ω immer endlich bleibt. Also:

Sind $\frac{\Theta}{2}$ und $\frac{T}{2}$ die Parameter der beiden Begrenzungsflächen der Schale, ferner $\Theta - T = \Delta$, und sind Γ, C die für jene beiden Flächen gegebenen Temperaturen; so wird nach Eintritt des stationären Zustandes die Temperatur V_p in irgend einem Punct $p(\vartheta, \omega)$ den in (49.) aufgestellten Werth besitzen.

Um die Formel (49.) zu prüfen, wenden wir dieselbe auf den Fall an, dass der Punct p in einer der beiden Grenzflächen liegt. Fällt z. B. p in die Fläche $(d\sigma)$, so muss sich, falls unsere Formel richtig ist, aus derselben $V_p = \Gamma$ ergeben. Für diesen Fall wird aber $\vartheta = \vartheta_\sigma$, also nach (50.) $= \frac{\Theta}{2}$; und hiefür ergiebt sich aus (49.):

$$V_p = C + (\Gamma - C) \,.\, \sqrt{e^{\frac{\Theta}{2}} + e^{-\frac{\Theta}{2}} - 2\cos\omega} \,.\, \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\frac{\Theta}{2}} \overset{(n)}{P}(\cos\omega)$$

oder, wenn man die hier vorkommende Wurzelgrössc mit Hülfe der Formel (48.) darstellt:

$$V_p = C + (\Gamma - C) = \Gamma. \qquad \text{q. e. d.}$$

§. 6. *Der stationäre Temperaturzustand eines Körpers, welcher im Innern durch irgend zwei Kugelflächen von gegebener Temperatur begrenzt, nach Aussen hin unbegrenzt ist.*

Von den in §. 2. pag. 25. betrachteten ϑ-Kugelflächen mögen gegenwärtig irgend zwei ausgewählt werden, die einander nicht umschliessen, von denen

also die eine ($d\sigma$) ihr Centrum rechts von den Polen A, A', die andere (ds) ihr Centrum links von denselben liegen hat. Der Parameter der ersten sei $= \frac{\Theta}{2}$, der der letztern $= \frac{T}{2}$. $\frac{\Theta}{2}$ wird dann, zufolge (21. a.) einen negativen, und $\frac{T}{2}$ einen positiven Werth besitzen. Ferner werden dann (nach 24.) Θ und T selber die ϑ-Coordinaten der Mittelpuncte μ und m der beiden Kugelflächen darstellen. Es handelt sich bei dem hier vorliegendem Problem um die Ermittelung einer von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängenden Function V, welche innerhalb des die Kugeln umgebenden unendlichen Raumes überall den Hauptbedingungen genügt, und auf jenen Kugelflächen selber beliebig gegebene Werthe besitzt. Die Methode, deren wir uns zur Lösung dieser Aufgabe bedienen werden, ist der bei einer Kugelschale angewandten ganz analog. Um die Temperatur V für irgend einen Punct p im Innern des gegebenen Raumes zu finden, bedienen wir uns nämlich wieder einer Function Ω_x, die das Potential des Punctes p und anderer Puncte a, a', b, b', c, c'... auf den beliebigen Punct (x, y, z) vorstellt. Alle diese Puncte befinden sich wiederum mit p in derselben Meridian-Ebene, und in der Peripherie eines Kreises, welcher durch p und die beiden Pole A, A' hindurchgeht. a, a' sind diejenigen Puncte dieser Kreisperipherie, in welchen dieselbe (Taf. II.) von zwei den Punct p mit den Mittelpuncten μ und m verbindenden Linien getroffen wird; b, b' diejenigen Puncte, in welchen die Kreisperipherie von zwei Linien geschnitten wird, die a, a' mit μ und m verbinden, u. s. w. Die Bezeichnung der Puncte soll dabei so gewählt sein, dass a', b', c'... alle rechts, und a, b, c... sämmtlich links von der $\mathfrak{y}$-Achse liegen. Aus der Construction dieser Puncte ergiebt sich, dass a', b', c'... alle innerhalb der Kugelfläche ($d\sigma$) und a, b, c... sämmtlich innerhalb der Kugelfläche (ds) liegen, dass also die einen wie die andern ausserhalb desjenigen Körpers sich befinden, für welchen die Temperatur ermittelt werden soll. Ferner bemerkt man, dass sich die beiden Punctreihen a', b', c'... und a, b, c... respective dem Pol A' und dem Pol A ins Unendliche nähern werden, sobald man dieselben, der angegebenen Construction gemäss, weiter und weiter fortsetzt.

(51.) Die ω-Coordinaten aller dieser Puncte $a, a', b, b' \dots$ sind gleich der des Punctes p, also $= \omega_p$. Was ferner ihre ϑ-Coordinaten anbelangt, so findet man für diese genau dieselben Formeln, welche früher bei Behandlung einer Kugelschale (in 32.) aufgestellt wurden.

Ω_x mag das Potential derjenigen Wirkung vorstellen, welche die Puncte $p, a, a', b, b' \dots$ auf den beliebigen Punct (x, y, z) ausüben, falls in jenen die Massen $\xi_p, -\xi_a, -\xi_{a'}, \xi_b, \xi_{b'}, \dots$ concentrirt gedacht werden; also:

$$(51.a.)\quad \Omega_x = \xi_p T_{px} - (\xi_a T_{ax} + \xi_{a'} T_{a'x}) + (\xi_b T_{bx} + \xi_{b'} T_{b'x}) - (\xi_c T_{cx} + \xi_{c'} T_{c'x}) + - \text{ etc.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$(51.b.)\quad \Omega_x = (\xi_p T_{px} - \xi_a T_{ax}) - (\xi_{a'} T_{a'x} - \xi_b T_{bx}) + (\xi_{b'} T_{b'x} - \xi_c T_{cx}) - + \dots$$

$$(51.c.)\quad \Omega_x = (\xi_p T_{px} - \xi_{a'} T_{a'x}) - (\xi_a T_{ax} - \xi_{b'} T_{b'x}) + (\xi_b T_{bx} - \xi_{c'} T_{c'x}) - + \dots$$

Aus diesen beiden letztern Darstellungen von Ω_x folgt leicht (ganz in derselben Weise wie in 34.), dass $\Omega_s = 0$ und $\Omega_\sigma = 0$ ist. Man findet demgemäss (ebenso wie in 35. a.) für die unbekannte Temperatur V_p im Puncte p folgenden Werth:

$$(51.d.)\quad 4\pi \xi_p V_p = -\int V_o \frac{d\Omega_o}{dN} do,$$

wo do irgend ein Element der beiden Grenzflächen des gegebenen Körpers, N die darauf errichtete in den angrenzenden Raum hinein (also entweder gegen m oder gegen μ hin) laufende Normale vorstellt, und die Integration über beide Grenzflächen ausgedehnt ist. V_o und Ω_o stellen dabei die Werthe vor, welche V und Ω in do besitzen. Diese Formel (51. d.) verwandelt sich, wenn man das Integral in zwei, respective auf die Fläche (ds) und auf $(d\sigma)$ bezügliche, Theile sondert, und beachtet, dass die Radien beider Kugeln, r sowohl als ϱ, mit der Normale N entgegengesetzte Richtung haben, in:

$$(52.)\quad 4\pi \xi_p V_p = \int V_s \frac{d\Omega_s}{dr} ds + \int V_\sigma \frac{d\Omega_\sigma}{d\varrho} d\sigma.$$

Durch Anwendung der in (37.) angegebenen Abkürzung ergiebt sich aus (51. b.) und (51. c.):

$$\Omega_s = [p, a]_s - [a', b]_s + [b', c]_s - [c', d]_s + - \ldots$$
$$\Omega_\sigma = [p, a']_\sigma - [a, b']_\sigma + [b, c']_\sigma - [c, d']_\sigma + - \ldots$$

folglich wird:

$$(53.a.) \quad \mathsf{S}\, V_s \frac{d\Omega_s}{dr} ds = \mathsf{S}\, V_s \frac{d[p, a]_s}{dr} ds - \mathsf{S}\, V_s \frac{d[a', b]_s}{dr} ds + - \ldots$$

$$(53.b.) \quad \mathsf{S}\, V_\sigma \frac{d\Omega_\sigma}{d\varrho} d\sigma = \mathsf{S}\, V_\sigma \frac{d[p, a']_\sigma}{d\varrho} d\sigma - \mathsf{S}\, V_\sigma \frac{d[a, b']_\sigma}{d\varrho} d\sigma + - \ldots$$

Denkt man sich nun die Kugelfläche (ds) mit einer homogenen Masse ausgefüllt, und bezeichnet man die Temperatur, welche irgend ein im Innern dieser Kugel befindlicher Punct β nach Eintritt des stationären Zustandes besitzen würde, falls die Oberfläche derselben in der gegebenen Temperatur V_s erhalten wird, mit F_β; so ist nach (29.) und mit Benutzung der Abkürzung (37.):

$$4\pi\, \xi_\beta F_\beta = \mathsf{S}\, V_s \frac{d[\alpha, \beta]_s}{dr} ds,$$

wo α den zu β in Bezug auf (ds) conjugirten Punct vorstellt. Ferner ergiebt sich, wenn man in Bezug auf die Kugel $(d\sigma)$ den analogen Fall in Betracht zieht, und die in irgend einem innern Punct β dieser Kugel eintretende Temperatur mit Φ_β bezeichnet:

$$4\pi\, \xi_\beta \Phi_\beta = \mathsf{S}\, V_\sigma \frac{d[\alpha, \beta]_\sigma}{d\varrho} d\sigma,$$

wo gegenwärtig α den zu β in Bezug auf $(d\sigma)$ conjugirten Punct bezeichnet. Durch Einführung dieser Temperaturen F und Φ gehen die Ausdrücke (53. a. und 53. b.) über in:

$$\mathsf{S}\, V_s \frac{d\Omega_s}{dr} ds = 4\pi (\xi_a F_a - \xi_b F_b + \xi_c F_c - \xi_d F_d + - \ldots)$$

$$\mathsf{S}\, V_\sigma \frac{d\Omega_\sigma}{d\varrho} d\sigma = 4\pi (\xi_{a'} \Phi_{a'} - \xi_{b'} \Phi_{b'} + \xi_{c'} \Phi_{c'} - \xi_{d'} \Phi_{d'} + - \ldots)$$

Somit folgt aus (52.) schliesslich:

$$(54.) \quad \xi_p V_p = \begin{cases} \xi_a F_a - \xi_b F_b + \xi_c F_c - \xi_d F_d + - \ldots \\ + \xi_{a'} \Phi_{a'} - \xi_{b'} \Phi_{b'} + \xi_{c'} \Phi_{c'} - \xi_{d'} \Phi_{d'} + - \ldots \end{cases}$$

Beachten wir daher, dass ξ das geometrische Mittel der beiden Pol-Abstände eines Punctes darstellt (21.), so gelangen wir zu folgendem Resultat:

(54. a.) *Um die Temperatur V_p in irgend welchem Puncte p des gegebenen, im Innern von den beiden Kugelflächen (ds) und $(d\sigma)$ begrenzten und nach Aussen hin unbegrenzten Körpers zu finden, hat man zunächst durch den Punct p und durch die beiden Pole einen Kreis zu legen und auf der Peripherie desselben nach einem gewissen Gesetze (man sehe Taf. II.) Puncte $a, b, c\ldots$ zu construiren, welche alle innerhalb der Kugel (ds) liegen, ferner Puncte $a', b', c'\ldots$, welche sämmtlich innerhalb der Kugel $(d\sigma)$ sich befinden. Betrachtet man sodann den stationären Temperaturzustand, welcher in jeder dieser beiden Kugeln — dieselbe mit homogener Materie erfüllt gedacht — eintreten wird, sobald dieselben an ihren Oberflächen in den für sie gegebenen Temperaturen erhalten werden, und bezeichnet man die unter diesen Umständen in $a, b, c\ldots$ eintretenden Temperaturen mit $F_a, F_b, F_c\ldots$, die in $a', b', c'\ldots$ eintretenden mit $\Phi_{a'}, \Phi_{b'}, \Phi_{c'}\ldots$, so lässt sich die gesuchte Temperatur V_p durch diese F und Φ in der Weise darstellen, wie es in (54.) angegeben ist. Für jeden der Puncte $p, a, b,\ldots$, $a', b',\ldots$ ist daselbst unter ξ das geometrische Mittel seiner beiden Polabstände zu verstehen.*

§. 7. *Nähere Untersuchung des Falles, dass die für die beiden innern Begrenzungsflächen gegebene Temperatur auf jeder derselben an allen Stellen gleich gross ist.*

Ist die Temperatur auf jeder der beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Körpers constant, $V_s = C$ und $V_\sigma = \Gamma$, so wird die Function F überall $= C$ und Φ überall $= \Gamma$ werden; so dass für diesen Fall die Formel (54.) folgendes Resultat liefert:

$$(55.)\quad V_p = C\frac{\xi_a - \xi_b + \xi_c - \xi_d + - \ldots}{\xi_p} + \Gamma\frac{\xi_{a'} - \xi_{b'} + \xi_{c'} - + \ldots}{\xi_p}$$

Nach (45.) ist

$$\xi = \frac{2a}{\sqrt{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}}$$

oder, wenn man für den Augenblick den Ausdruck rechts mit $\varphi(\vartheta)$ bezeichnet, also

(55. a.) $$\frac{2a}{\sqrt{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega}} = \varphi(\vartheta)$$

setzt, kürzer: $$\xi = \varphi(\vartheta).$$

Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Werth der Coordinaten

(56.) $$\omega_p = \omega_a = \omega_b = \ldots = \omega_{a'} = \omega_{b'} = \ldots$$

schlechtweg mit ω, so ergiebt sich aus (55.)

$$V_p = C\frac{\varphi(\vartheta_a)-\varphi(\vartheta_b)+\varphi(\vartheta_c)-+\ldots}{\varphi(\vartheta_p)} + \Gamma\frac{\varphi(\vartheta_{a'})-\varphi(\vartheta_{b'})+\varphi(\vartheta_{c'})-+\ldots}{\varphi(\vartheta_p)}$$

wo das in den Functionen φ enthaltene Argument ω den gemeinsamen Werth der eben genannten Coordinaten repräsentirt. Da nach (55. a.) $\varphi(\vartheta) = \varphi(-\vartheta)$ ist, so lässt sich diese Formel auch so darstellen:

(57.) $$V_p = C\frac{\varphi(-\vartheta_a)-\varphi(-\vartheta_b)+\varphi(-\vartheta_c)\ldots}{\varphi(\vartheta_p)} + \Gamma\frac{\varphi(\vartheta_{a'})-\varphi(\vartheta_{b'})+\varphi(\vartheta_{c'})\ldots}{\varphi(\vartheta_p)}$$

Die hier in den Functionen φ enthaltenen Argumente

$$-\vartheta_a,\quad -\vartheta_b,\quad -\vartheta_c,\ \ldots$$
$$\vartheta_{a'},\quad \vartheta_{b'},\quad \vartheta_{c'},\ \ldots$$

sind, weil die Puncte a, b, c ... links, a', b', c' ... hingegen rechts von der $\mathfrak{y}$-Achse liegen (Taf. II.), (zufolge 21. a.) sämmtlich negativ, und besitzen (nach 51. u. 32.) folgende Werthe:

(58.) $$\left\{\begin{array}{ll} -\vartheta_a = \vartheta_p - T & -\vartheta_b = -\vartheta_p + \Delta \\ -\vartheta_c = \vartheta_p - T + \Delta & -\vartheta_d = -\vartheta_p + \Delta + \Delta \\ -\vartheta_e = \vartheta_p - T + 2\Delta & -\vartheta_f = -\vartheta_p + \Delta + 2\Delta \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ \vartheta_{a'} = \Theta - \vartheta_p & \vartheta_{b'} = \vartheta_p + \Delta \\ \vartheta_{c'} = \Theta - \vartheta_p + \Delta & \vartheta_{d'} = \vartheta_p + \Delta + \Delta \\ \vartheta_{e'} = \Theta - \vartheta_p + 2\Delta & \vartheta_{f'} = \vartheta_p + \Delta + 2\Delta \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right.$$

wo $\Delta = \Theta - T$ ist. Hierdurch verwandelt sich (57.), wenn man die ϑ-Coordinate von p schlechtweg mit ϑ bezeichnet, in

(59.) $$V_p = \frac{1}{\varphi(\vartheta)}\cdot\sum_{h=0}^{h=\infty}\left\{\begin{array}{l} C[\varphi(\vartheta - T + h\Delta) - \varphi(-\vartheta + \Delta + h\Delta)] \\ + \Gamma[\varphi(\Theta - \vartheta + h\Delta) - \varphi(\vartheta + \Delta + h\Delta)] \end{array}\right\}$$

wo die Argumente der Functionen φ identisch mit denen in (57.), also ebenso wie jene sämmtlich n e g a t i v sind. Nun gelten für irgend zwei negative Grössen γ, $\varDelta$ (nach 1. a.) folgende Entwickelungen:

$$\varphi(\gamma) = \frac{2a}{\sqrt{e^{\gamma} + e^{-\gamma} - 2\cos\omega}} = 2a \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}\gamma} . \overset{(n)}{P}(\cos\omega)$$

$$\varphi(\gamma + h\varDelta) = 2a \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}\gamma} . e^{h.\frac{2n+1}{2}\varDelta} . \overset{(n)}{P}(\cos\omega),$$

also, wenn man nach h zwischen 0 und ∞ summirt:

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} (\gamma + h\varDelta) = 2a \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{2n+1}{2}\gamma} . \overset{(n)}{P}(\cos\omega)}{1 - e^{\frac{2n+1}{2}\varDelta}}.$$

Durch die letzte Formel verwandelt sich (59.) in:

(60.)

$$V_p = \sqrt{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega} . \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \begin{array}{l} C . \dfrac{e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta - T)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\varDelta - \vartheta)}}{1 - e^{\frac{2n+1}{2}\varDelta}} \\ + \Gamma . \dfrac{e^{\frac{2n+1}{2}(\Theta - \vartheta)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\varDelta + \vartheta)}}{1 - e^{\frac{2n+1}{2}\varDelta}} \end{array} \right\} . \overset{(n)}{P}(\cos\omega)$$

Was die *Convergenz* dieser Reihe anbelangt, so ist zu bemerken, dass die Verbindungslinie $\overline{AA'}$ der beiden Pole von sämmtlichen überhaupt vorhandenen ϑ-Kugelflächen durchschnitten wird. Wenn man daher von A' nach A fortgeht, so wird man allen diesen Kugelflächen, wie sie auf einander folgen und jeder nur einmal begegnen. Man wird dabei zuerst (Taf. II.) auf die Fläche $(d\sigma)$ stossen, dann einer Fläche begegnen, welche durch den Punct p hindurchgeht, endlich der Fläche (ds) begegnen. Demnach wird der während dieses Fortganges von A' nach A stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsende Parameter ϑ hiebei der Reihe nach die Werthe $\frac{\Theta}{2}$, $\vartheta_p = \vartheta$, $\frac{T}{2}$ durchlaufen, so dass also

$$(*) \qquad -\infty < \frac{\Theta}{2} < \vartheta_p = \vartheta < \frac{T}{2} < +\infty$$

sein muss. In gleicher Weise ergiebt sich, wenn man beachtet, dass ϑ in der Mitte der Linie $\overline{AA'}$ Null wird:

$$(**) \qquad -\infty < \frac{\Theta}{2} < 0 < \frac{T}{2} < +\infty$$

Aus diesen Relationen (*) und (**) folgt sofort, dass die fünf Grössen:

$$\vartheta - T$$
$$\Theta - \vartheta$$
$$\Theta - T = \Delta$$
$$(\Theta - \vartheta) - T = \Delta - \vartheta$$
$$\Theta + (\vartheta - T) = \Delta + \vartheta$$

sämmtlich negativ sind, dass also alle Exponenten von e in der Reihen-Entwickelung (60.) negative Werthe besitzen. Daraus aber ergiebt sich (ähnlich wie bei 50. a.), dass die Reihe (60.) unter allen Umständen convergent ist, nämlich convergent ist, welche Lage der Punct $p(\vartheta, \omega)$ innerhalb des hier gegebenen Körpers auch haben mag. Also:

(60. a). *Sind* $\frac{\Theta}{2}$ *und* $\frac{T}{2}$ *die Parameter der beiden innern Begrenzungsflächen des Körpers, ferner* Γ *und* C *die für dieselben gegebenen Temperaturen, und wird endlich* $\Theta - T = \Delta$ *gesetzt, so besitzt die an irgend einer Stelle* $p(\vartheta, \omega)$ *des Körpers nach Eintritt des stationären Zustandes vorhandene Temperatur* V_p *den in* (60.) *angegebenen Werth.*

Für den Fall, dass die Radien der beiden innern Begrenzungsflächen einander *gleich* sind, wird $\Theta = -T$, also $\Delta = -2T$. Nimmt man ausserdem noch an, dass die Temperatur für beide Flächen *dieselbe*, also $\Gamma = C$ ist, so verwandelt sich die Formel (60.) in:

(60. b.)

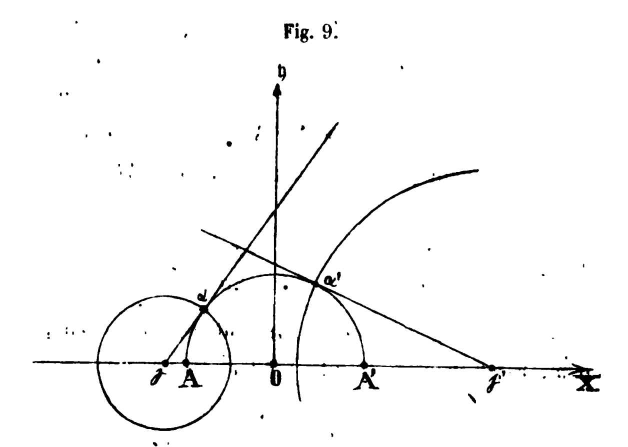
$$V_p = C.\sqrt{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}\,.\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}T}\left(e^{\frac{2n+1}{2}\vartheta} + e^{-\frac{2n+1}{2}\vartheta}\right)}{1 + e^{-\frac{2n+1}{2}T}}\,.\overset{(n)}{P}(\cos\omega)$$

§. 8. *Der stationäre Temperaturzustand eines Körpers, welcher im Innern durch zwei einander berührenden Kugelflächen von gegebener Temperatur begrenzt und nach Aussen hin unbegrenzt ist.*

Um diesen Fall nach der angegebenen Methode behandeln zu können, müssen wir das Coordinatensystem (ϑ, ω) der Art wählen, dass wenigstens zwei von den ϑ-Flächen einander berühren. Betrachten wir

an Stelle der *räumlichen* Figur zunächst die *ebene* Figur in einer Meridianebene. Sämmtliche ϑ-Curven in dieser Ebene können dadurch erhalten werden, dass man über der Verbindungslinie $\overline{AA'}$ der beiden Pole einen Halbkreis beschreibt, sodann von irgend welchen Puncten γ, γ' aus, die links oder rechts auf der x Achse liegen, Tangenten an jenen Halbkreis legt, und endlich um die Puncte γ, γ' mit diesen Tangenten $\overline{\gamma\alpha}$, $\overline{\gamma'\alpha'}$, als Radien, Kreise beschreibt (Fig. 9). Zwei auf diese Weise

Fig. 9.



construirte Kreise werden einander offenbar *niemals berühren* können (ausgenommen etwa den Fall, dass die Mittelpuncte γ, γ' unendlich fern liegen, wo dann beide Kreise mit der y-Achse zusammenfallen).

Solches gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Pole A, A' einen gewissen Abstand von einander haben. Ist hingegen dieser Abstand Null, also auch der Radius des Halbkreises $\overline{OA} = \overline{OA'}$ gleich Null, so werden die Puncte α, α' mit O zusammenfallen, folglich die um γ, γ' beschriebenen Kreise einander *berühren*. Es werden also dann *sämmtliche ϑ-Curven im Puncte O untereinander sowohl als auch mit der y-Achse in Contact stehen.* Was andererseits die ω-Curven anbelangt, so bestehen diese aus einem System von Kreisen, welche die Linie $\overline{AA'}$ zur gemeinsamen Sehne haben, welche also die Verlängerung dieser Linie d. i. die x-Achse zur gemeinschaftlichen Tangente haben werden, sobald $\overline{AA'} = 0$ wird. Fallen demnach die beiden Pole mit O zusammen, so

werden *sämmtliche* ω*-Curven im Puncte O sowohl untereinander als auch mit der* x*-Achse in Contact stehen.*

Da die Coordinaten ϑ, ω irgend eines Punctes α (nach 21.) die Werthe

$$\vartheta = \log \frac{\overline{\alpha A'}}{\overline{\alpha A}}, \qquad \omega = \widehat{A\alpha A'}$$

besitzen, so werden ϑ und ω beide Null werden, sobald die Pole A, A' zusammenfallen, welche Lage der Punct α auch immer besitzen mag. Es werden also dann ϑ, ω selber zur Ortsbestimmung eines Punctes nicht länger anwendbar sein. Aus diesem Grunde führen wir an ihrer Stelle — und zwar zunächst unter der Voraussetzung, dass der Abstand $2a$ der beiden Pole nicht *Null*, sondern nur *sehr klein* ist — die Quotienten

$$(61.) \qquad \frac{\vartheta}{2a} = \lambda, \qquad \frac{\omega}{2a} = s$$

ein. Der Zusammenhang zwischen λ, s und zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y ist dann nach (15.) folgender:

$$x + iy = a\frac{1 + e^{2a(\lambda+is)}}{1 - e^{2a(\lambda+is)}}$$

oder, wenn wir nach Potenzen der sehr kleinen Grösse a entwickeln

$$x + iy = a\frac{2 + 2a(\lambda+is) + 2a^2(\lambda+is)^2 + \ldots}{-2a(\lambda+is) - 2a^2(\lambda+is)^2 - \ldots},$$

oder, wenn wir nunmehr $a = 0$ werden lassen:

$$(62.) \qquad x + iy = -\frac{1}{\lambda + is}.$$

Hieraus lässt sich die geometrische Bedeutung der neuen Variabeln λ, s leicht deduciren. Durch Sonderung des Reellen und Imaginären erhalten wir nämlich aus (62.):

$$(63.) \quad \begin{cases} x = \dfrac{-\lambda}{\lambda^2 + s^2} \\[2ex] y = \dfrac{s}{\lambda^2 + s^2} \end{cases} \qquad \text{oder (64.)} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{-x}{x^2 + y^2} \\[2ex] s = \dfrac{y}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Den Formeln (64.) können wir auch folgende Gestalt geben:

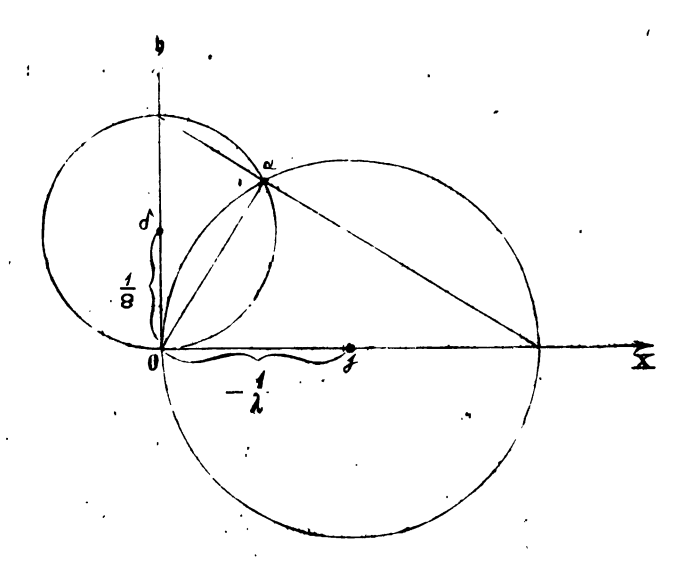
$$(65.)\qquad \begin{cases} \left(x+\frac{1}{\lambda}\right)^2+\mathfrak{y}^2=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2, \\ x^2+\left(\mathfrak{y}-\frac{1}{s}\right)^2=\left(\frac{1}{s}\right)^2; \end{cases}$$

und daraus erkennen wir sofort, dass alle Puncte mit constantem λ auf einem Kreise liegen, der durch O geht und seinen Mittelpunct in der x-Achse hat; ferner, dass alle Puncte, für welche s constant ist, auf einem Kreise liegen, der ebenfalls durch O geht, dessen Mittelpunct aber in der $\mathfrak{y}$-Achse liegt; endlich, dass die Werthe von λ und s zu den Distanzen, welche die Mittelpuncte γ, δ dieser beiden Kreise von O aus haben (Fig. 10.), in folgender Beziehung stehen:

$$(66.)\qquad \begin{cases} \overline{O\gamma}=-\frac{1}{\lambda} \\ \overline{O\delta}=+\frac{1}{s}. \end{cases}$$

(66. a.) Irgend ein Punct α (Fig. 10.) mit den Coordinaten (λ, s)

Fig. 10.



wird also der Schnittpunct zweier Kreise sein, von denen der eine die $\mathfrak{y}$-, der andere die x-Achse in O berührt, und von denen der erstere

den Radius $\pm\frac{1}{\lambda}$, der andere den Radius $\pm\frac{1}{\varepsilon}$ besitzt. Dabei wird *dieser Punct rechts oder links von der $\mathfrak{y}$-Achse liegen*, je nachdem die Distanz $\overline{O\gamma}$ einen positiven oder negativen Werth hat, d. h. (nach 66.) *je nachdem λ negativ oder positiv ist*; ferner *oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen*, je nachdem die Distanz $\overline{O\delta}$ positiv oder negativ ist, d. h. (nach 66.) *je nachdem ε positiv oder negativ ist.*

Da die gegenwärtigen Coordinaten λ, ε (zufolge 61.) von den früheren Coordinaten ϑ, ω nur durch den constanten (allerdings unendlich grossen) Factor $\frac{1}{2a}$ unterschieden sind, so werden sich die meisten der für die letzteren gefundenen Eigenschaften unmittelbar auf die erstern übertragen lassen. Dass z. B. λ negativ ist für alle Puncte rechts von der $\mathfrak{y}$-Achse und positiv für alle links von derselben befindlichen Puncte, entspricht vollständig dem früher bei ϑ beobachtetem Verhalten (21. a.). Ebenso werden sich auch die in (24.) und (26. a. bis d.) für ϑ, ω aufgestellten Sätze geradezu auf λ, ε übertragen lassen. Bezeichnet man die Kugelflächen, welche durch Rotation der λ-Kreise um die x-Achse entstehen, mit dem Namen λ-Kugeln, und die ε-Kreise, welche die senkrechten Trajectorien dieses Flächensystems repräsentiren, mit dem Namen ε-Curven, so lassen sich jene Sätze hier so aussprechen:

(**67.**) Alle Puncte, für welche λ einen constanten gegebenen Werth hat, liegen auf einer Kugelfläche, in deren Centrum λ einen doppelt so grossen Werth besitzt.

(**68.**) Sind α, β irgend zwei gegebene Puncte, welche in Bezug auf irgend eine gegebene λ-Kugel zu einander conjugirt sind, so liegen

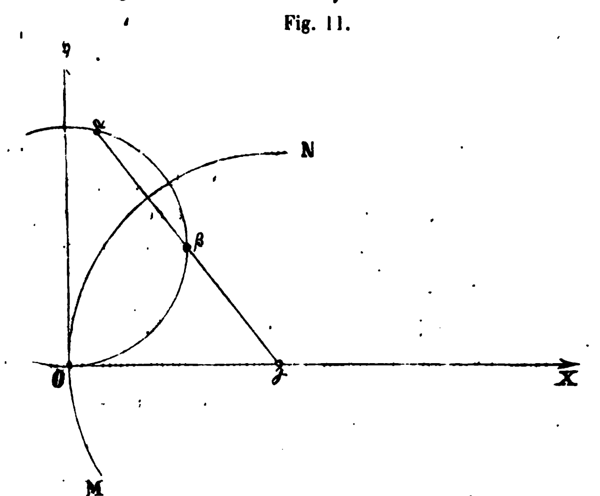
erstens α und β auf ein und derselben ε-Curve, d. h. die ε-Coordinaten beider Puncte sind einander gleich $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$;

ferner ist alsdann $\lambda_\alpha + \lambda_\beta = \lambda_\gamma$, wo γ das Centrum der gegebenen λ-Kugel vorstellt, und λ_α, λ_β, λ_γ die Werthe bezeichnen, welche λ in den Puncten α, β, γ besitzt.

Direct lassen sich diese Sätze folgendermassen beweisen: Man nehme zur $x\mathfrak{y}$-Ebene diejenige Meridianebene, welche durch die beiden gegebenen Puncte α, β hindurchgeht; *MN* sei (Fig. 11.) der Kreis, in welchem diese Ebene von der gegebenen, um γ beschriebenen λ-Kugelfläche geschnitten

wird. Nach der Definition von α, β, als Puncte, welche in Bezug auf MN conjugirt sind, befinden sich dann γ, β, α in derselben geraden Linie, und zwar in solcher Lage, dass der Radius $\overline{\gamma O}$ des Kreises MN mittlere Propor-

Fig. 11.



tionale zwischen $\overline{\gamma\beta}$ und $\overline{\gamma\alpha}$ ist. Es müssen demnach die Puncte α, β auf der Peripherie eines Kreises liegen, welcher in O von der Linie $\overline{\gamma O}$ berührt wird; d. h. sie müssen beide auf ein und derselben $\mathfrak{s}$-Curve liegen (wie in (68.) primo loco behauptet wurde).

Da ferner α, β, γ auf einer geraden Linie liegen, so findet zwischen ihren rechtwinkligen Coordinaten folgende Relation statt:

$$\frac{\mathfrak{x}_\alpha - \mathfrak{x}_\gamma}{\mathfrak{y}_\alpha} = \frac{\mathfrak{x}_\beta - \mathfrak{x}_\gamma}{\mathfrak{y}_\beta}.$$

Beachtet man, dass die $\mathfrak{y}$-Coordinate, mithin nach (64.) auch die $\mathfrak{s}$-Coordinate des Punctes γ Null ist, und dass daher, wenn die gemeinschaftliche $\mathfrak{s}$-Coordinate der Puncte α, β mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet wird, zufolge (63.)

$$\mathfrak{x}_\alpha = \frac{-\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha^2 + \mathfrak{s}^2} \qquad \mathfrak{x}_\beta = \frac{-\lambda_\beta}{\lambda_\beta^2 + \mathfrak{s}^2} \qquad \mathfrak{x}_\gamma = -\frac{1}{\lambda_\gamma}$$

$$\mathfrak{y}_\alpha = \frac{\mathfrak{s}}{\lambda_\alpha^2 + \mathfrak{s}^2} \qquad \mathfrak{y}_\beta = \frac{\mathfrak{s}}{\lambda_\beta^2 + \mathfrak{s}^2} \qquad \mathfrak{y}_\gamma = 0$$

werden, so verwandelt sich jene Relation in:

$$\frac{\lambda_\alpha^2 + \mathfrak{s}^2}{\mathfrak{s}}\left(\frac{-\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha^2 + \mathfrak{s}^2} + \frac{1}{\lambda_\gamma}\right) = \frac{\lambda_\beta^2 + \mathfrak{s}^2}{\mathfrak{s}}\left(\frac{-\lambda_\beta}{\lambda_\beta^2 + \mathfrak{s}^2} + \frac{1}{\lambda_\gamma}\right)$$

oder*:

$$-\lambda_\alpha\lambda_\gamma + \lambda_\alpha^2 + \vartheta^2 = -\lambda_\beta\lambda_\gamma + \lambda_\beta^2 + \vartheta^2.$$

d. i.

$$\lambda_\gamma(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) = \lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2$$

oder:

$$(*) \qquad \lambda_\gamma = \lambda_\alpha + \lambda_\beta;$$

(wie in (68.) secundo loco behauptet war).

Endlich ergiebt sich der in (67.) aufgestellte Satz aus der Formel (*) sofort, falls man α, β *zusammen*fallen lässt. Alsdann werden diese beiden Puncte, weil sie in Bezug auf die Kugel MN conjugirt sein sollen, irgendwo auf der Oberfläche derselben liegen. Zugleich aber verwandelt sich alsdann die Formel (*) in $\lambda_\gamma = 2\lambda_\alpha$.

Gehen wir nun zur Lösung der in diesem §. vorgelegten Wärmeaufgabe über. Wir können dieselbe als einen speciellen Fall der in §. 6 pag. 49. behandelten Aufgabe ansehen. An Stelle der beiden ϑ-Flächen (ds) und ($d\sigma$), welche den gegebenen Körper damals im Innern begrenzten, sind gegenwärtig zwei λ-Flächen getreten, also zwei Flächen getreten, welche aus jenen ϑ-Flächen entstehen, sobald man die beiden Pole A, A' zusammenfallen lässt. Versuchen wir, ob das bei der damaligen Aufgabe (in 54.) gefundene Resultat

$$(69.) \qquad \xi_p V_p = \begin{cases} \xi_a F_a - \xi_b F_b + \xi_c F_c - + \dots \\ + \xi_{a'} \Phi_{a'} - \xi_{b'} \Phi_{b'} + \xi_{c'} \Phi_{c'} - + \dots \end{cases}$$

nicht einer Uebertragung auf den gegenwärtigen Specialfall fähig ist. Was zunächst die Puncte $a, b, c \dots, a', b', c' \dots$ anbelangt, welche dem im Innern des Körpers beliebig gewähltem Puncte p zugehören, so zeigt sich, dass die für dieselben damals (in §. 6.) angegebene Construction (Taf. II.), auch dann noch — und zwar in vollständig ungeänderter Weise — ausführbar ist, wenn die beiden Pole A, A' zusammenfallen, und die beiden Begrenzungsflächen (ds) und ($d\sigma$) in Folge dessen einander berühren. Ferner erkennt man, dass auch die F und Φ ihre bestimmte Bedeutung, wie sie in (54.a.) angegeben ist, beibehalten. Endlich wird jedes der ξ, als geometrisches Mittel der beiden Pol-Abstände eines Punctes, in dem hier betrachteten Fall den Abstand des Punctes von dem Orte O, in welchen beide Pole zusammengefallen sind,

repräsentiren. Die Formel (69.) enthält daher bereits die vollständige Lösung der in diesem §. vorgelegten Aufgabe.

Wir wenden uns sofort zur genaueren Untersuchung des Falles, dass die gegebene Temperatur für die eine Grenzfläche überall gleich gross ist, dass ferner dasselbe auch für die andere Grenzfläche gilt, und dass folglich, da beide Flächen einander berühren, die gegebene Oberflächen-Temperatur *durchweg* ein und denselben Werth C besitzt. Alsdann sind die Werthe der F und Φ ebenfalls alle $= C$; so dass die Formel (69.) übergeht in:

$$(70.)\quad V_p = C\,\frac{\xi_a - \xi_b + \xi_c - + \ldots}{\xi_p} + C\,\frac{\xi_{a'} - \xi_{b'} + \xi_{c'} - + \ldots}{\xi_p}$$

Um V_p durch die Coordinaten λ_p, ϑ_p des Punctes p auszudrücken, bemerken wir zunächst, dass der Parameter ξ irgend eines Punctes $(x, \mathfrak{y})$ den Abstand desselben von O darstellt, also

$$\xi = \sqrt{x^2 + \mathfrak{y}^2}$$

ist. Daraus folgt, wenn die neuen Coordinaten von $(x, \mathfrak{y})$ mit λ, ϑ bezeichnet werden (nach 63.):

$$(71.)\qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \vartheta^2}}.$$

Vermittelst dieser Formel lässt sich ξ_p sofort durch λ_p und ϑ_p darstellen. Um nun aber auch ξ_a, $\xi_b \ldots \xi_{a'}$, $\xi_{b'} \ldots$ durch λ_p, ϑ_p auszudrücken, muss zunächst die Beziehung aufgesucht werden, in welcher die λ- und ϑ-Coordinaten der Puncte a, $b \ldots a'$, $b' \ldots$ zu denen des Punctes p stehen. Da die gegenwärtigen Coordinaten λ, ϑ von den früher angewendeten ϑ, ω (nach 61.) nur durch einen constanten (allerdings unendlich grossen) Factor $\frac{1}{2a}$ unterschieden sind, so wird jede homogene lineäre Relation, die zwischen den ϑ- und ω-Coordinaten irgend einer Anzahl von Puncten stattfindet, auch für die λ- und ϑ-Coordinaten dieser Puncte gültig sein. Demgemäss lassen sich die in (56.) und (58.) für die Coordinaten ϑ, ω der Puncte p, a, $b \ldots a'$, $b', \ldots$ gefundenen Relationen sofort auf die gegenwärtig vorhandenen λ- und ϑ-Coordinaten übertragen. Durch Multiplication der Relationen (56.) mit $\frac{1}{2a}$ ergiebt sich:

$$(72.)\quad s_p = s_a = s = \ldots \qquad = s_{a'} = s_{b'} = \ldots$$

ferner durch Multiplication der Relationen (58.) mit demselben Factor:

$$(73.)\quad \left\{\begin{array}{ll} -\lambda_a = \lambda_p - L & -\lambda_b = -\lambda_p + D \\ -\lambda_c = \lambda_p - L + D & -\lambda_d = -\lambda_p + D + D \\ -\lambda_e = \lambda_p - L + 2D & -\lambda_f = -\lambda_p + D + 2D \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ \lambda_{a'} = \Delta - \lambda_p & \lambda_{b'} = \lambda_p + D \\ \lambda_{c'} = \Delta - \lambda_p + D & \lambda_{d'} = \lambda_p + D + D \\ \lambda_{e'} = \Delta - \lambda_p + 2D & \lambda_{f'} = \lambda_p + D + 2D \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right.$$

wo $L = \frac{T}{2a}$, $\Delta = \frac{\Theta}{2a}$ die λ-Coordinaten der Mittelpuncte der beiden Begrenzungsflächen (ds), $(d\sigma)$ vorstellen, und $D = \frac{\Delta}{2a}$ die Differenz $\Delta - L$ repräsentirt.

Durch Anwendung von (71.), (72.) und (73.) würden sich nunmehr die ξ der Puncte $a, b \ldots a', b' \ldots$ sofort durch λ_p und s_p ausdrücken lassen. Ehe wir jedoch solches in Ausführung bringen, wollen wir zuerst der Formel (71.) eine hiefür mehr geeignete Gestalt geben. Bekanntlich ist allgemein *):

$$(*)\qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\bar{\lambda} - is\cos\alpha},$$

wo $\bar{\lambda}$ den *absoluten* Werth von λ vorstellt. Da nun, wenn A irgend welche Grösse mit positivem reellem Theile vorstellt,

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty e^{-An} dn$$

ist, folglich

$$\frac{1}{\bar{\lambda} - is\cos\alpha} = \int_0^\infty e^{-\bar{\lambda}n} \cdot e^{isn\cos\alpha}\, dn$$

wird, so ergiebt sich aus (*):

---

*) Man sehe z. B. Heine's Handb. d. Kugelfunct. Pag. 11.

$$\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left\{ e^{-\bar{\lambda} n} . \int\limits_0^\pi e^{i\varepsilon n \cos\alpha} d\alpha \right\} dn$$

oder, wenn man sich der *Bessel*'schen Bezeichnung (4. a.)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{i x \cos\alpha} d\alpha = J(x)$$

bedient:

$$(74.) \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\varepsilon^2}} = \int\limits_0^\infty e^{-\bar{\lambda} n} J(\varepsilon n) . dn .$$

Da λ (zufolge 66. a.) positiv ist für die links von der $\mathfrak{y}$-Achse liegenden Puncte, und negativ für die rechts von derselben befindlichen, so wird für die ersteren, also z. B. für die Puncte a, b, c... (Taf. II.) $\bar{\lambda} = \lambda$, für die letzteren hingegen, z. B. für a', b', c'... $\bar{\lambda} = -\lambda$ sein.

Demnach ergiebt sich aus (74.) durch Substitution der Werthe (72.) und (73.)

$$\xi_a + \xi_c + \xi_e + \ldots = \int\limits_0^\infty e^{(\lambda_p - L)n} . (1 + e^{Dn} + \ldots) . J(\varepsilon_p n)\, dn$$

$$\xi_b + \xi_d + \xi_f + \ldots = \int\limits_0^\infty e^{(-\lambda_p + D)n} . (1 + e^{Dn} + \ldots) . J(\varepsilon_p n)\, dn ,$$

folglich, wenn man die Reihen unter dem Integralzeichen summirt, und λ, ε statt λ_p, ε_p setzt:

$$(\xi_a + \xi_c + \xi_e + ..) - (\xi_b + \xi_d + \xi_f + ..) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{(\lambda - L)n} - e^{(D-\lambda)n}}{1 - e^{Dn}} J(\varepsilon n)\, dn .$$

Ebenso ergiebt sich:

$$(\xi_{a'} + \xi_{c'} + \xi_{e'} + ..) - (\xi_{b'} + \xi_{d'} + \xi_{f'} + ..) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{(\Lambda - \lambda)n} - e^{(D+\lambda)n}}{1 - e^{Dn}} J(\varepsilon n)\, dn .$$

Hierdurch verwandelt sich, wenn man beachtet, dass $D = \Lambda - L$ ist, der für die Temperatur V_p gefundene Werth (70.) in:

$$(75.) \quad V_p = C\sqrt{\lambda^2+\varepsilon^2} . \int\limits_0^\infty \frac{e^{(\lambda - L)n}(1 - e^{\Lambda n}) + e^{-(\lambda - \Lambda)n}(1 - e^{-Ln})}{1 - e^{(\Lambda - L)n}} J(\varepsilon n)\, dn .$$

Da L und $\varLambda$ die λ-Coordinaten der Mittelpuncte der beiden Begrenzungsflächen des Körpers sind, so werden nach (67.) alle Puncte, die auf der ersten Fläche liegen, $\frac{L}{2}$, und alle, welche auf der zweiten Fläche sich befinden, $\frac{\varLambda}{2}$ zur λ-Coordinate haben. Das erlangte Resultat lässt sich daher so aussprechen:

(**75. a.**) *Sind $\frac{L}{2}$ und $\frac{\varLambda}{2}$ die Parameter der beiden einander berührenden Begrenzungsflächen des Körpers, ferner C die für dieselben gegebene Temperatur, und wird $\varLambda - L = D$ gesetzt; so besitzt die in irgend einem Puncte $p(\lambda, \vartheta)$ des Körpers nach Eintritt des stationären Zustandes herrschende Temperatur V_p den in* (75.) *angegebenen Werth.*

Für den Fall, dass die Radien beider Begrenzungsflächen *gleich* sind, wird $\varLambda = -L$, also $D = -2L$. Alsdann geht (75.) über in:

$$(\mathbf{75. b.}) \qquad V_p = C.\sqrt{\lambda^2 + \vartheta^2}.\int\limits_0^\infty \frac{e^{-Ln}(e^{\lambda n} + e^{-\lambda n})}{1 + e^{-Ln}} J(\vartheta n)\, dn.$$

Man erkennt sofort die Aehnlichkeit, welche zwischen dieser Formel und der früher, als die beiden Flächen einander *nicht* berührten, gefundenen Formel (60. b.) stattfindet. Die *Summation* zwischen $n = 0$ und $n = \infty$ ist hier durch eine *Integration* zwischen denselben Grenzen, und *die Laplace'sche Function* $\overset{(n)}{P}(\cos\omega)$ *hier durch die Bessel'sche Function* $J(\vartheta n)$ *vertreten.*

§. 9. *Anwendung der in* §. 4. *und* §. 5. *durchgeführten Untersuchung auf eine von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzte Schale.*

Das in §. 2. eingeführte Coordinatensystem (ϑ, ω) muss gegenwärtig für den besondern Fall, dass einer der beiden Pole unendlich weit entfernt ist, näher untersucht werden. Der Pol A' mag seine ursprüngliche Lage beibehalten, während der andere Pol A auf der x-Achse nach links hin (Fig. 3, Pag. 26.) ins Unendliche fortrückt. Bezeichnet α einen beliebigen Punct mit den Coordinaten ϑ, ω, so wird der eine Schenkel des Winkels $\omega = \widehat{A'\alpha A}$ parallel mit der x-Achse werden, sobald A unendlich fern liegt. Es wird demnach alsdann ω *denjenigen Winkel repräsentiren, unter welchem der Polabstand* $\overline{A'\alpha}$ — *dieser mag mit r bezeichnet werden* — *gegen die x-Achse*

geneigt ist. Was ferner ϑ anbelangt, so wird, falls A ins Unendliche fortrückt,

$$(\alpha.) \qquad e^{\vartheta} = \frac{\overline{A'\alpha}}{\overline{A\alpha}} = \frac{r}{\infty} = 0,$$

also $\vartheta = -\infty$ werden. Multiplicirt man jedoch die vorstehende Formel, ehe man sie auf diesen Fall in Anwendung bringt, zuvor mit der Distanz $\overline{AA'} = 2a$, so erhält man

$$2ae^{\vartheta} = \overline{A'\alpha} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A\alpha}} = r \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A\alpha}}.$$

Und diese Formel wird, wenn man nunmehr A ins Unendliche fortrücken lässt, in

$$(\beta.) \qquad 2ae^{\vartheta} = r$$

übergehen.

Somit ergiebt sich also für den hier betrachteten Special-Fall Folgendes. ϑ selber wird $= -\infty$, und ist daher als Coordinate des Punctes α nicht länger anwendbar. An Stelle von ϑ kann jedoch in diesem Sinne der Ausdruck $2ae^{\vartheta}$ benutzt werden, welcher (zufolge $\beta.$) gleich dem Abstande des Punctes α von dem Pole A' ist. Ferner verwandelt sich die Coordinate ω in denjenigen Winkel, unter welchem der eben genannte Abstand gegen die x-Achse geneigt ist. Das Coordinatensystem (ϑ, ω) geht also, wenn der eine Pol A im Unendlichen liegt, in ein gewöhnliches Polar-Coordinatensystem über, dessen Anfangspunct mit dem in der Endlichkeit liegendem Pole A' zusammenfällt. *Demzufolge werden sich die ϑ-Curven hier in ein System concentrischer Kreise mit dem Mittelpunct A', und die ω-Curven in die Radien dieser Kreise verwandeln.*

Um ferner die gegenwärtige Bedeutung des Parameters ξ zu ermitteln, benutzen wir die Formel (45.)

$$\xi = \frac{2a\sqrt{e^{\vartheta}}}{\sqrt{1 - 2e^{\vartheta}\cos\omega + e^{2\vartheta}}}$$

und ziehen gleichzeitig *zwei* beliebige Puncte α und β in Betracht. Für diese ergiebt sich, wenn man die Parameter des einen mit ϑ_α, ω_α, ξ_α, die des andern mit ϑ_β, ω_β, ξ_β bezeichnet, sofort:

$$\frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} = \sqrt{\frac{e^{\vartheta_\alpha}}{e^{\vartheta_\beta}}} \cdot \sqrt{\frac{1 - 2e^{\vartheta_\beta}\cos\omega + e^{2\vartheta_\beta}}{1 - 2e^{\vartheta_\alpha}\cos\omega + e^{2\vartheta_\alpha}}}.$$

Sind r_α und r_β die Abstände der beiden Puncte vom Pole A', so wird zufolge der Formeln ($\alpha.$) und ($\beta.$):

$$\frac{e^{\vartheta_\alpha}}{e^{\vartheta_\beta}} = \frac{r_\alpha}{r_\beta}, \qquad e^{\vartheta_\alpha} = 0, \qquad e^{\vartheta_\beta} = 0,$$

folglich:

$$(\gamma.) \qquad \frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} = \sqrt{\frac{r_\alpha}{r_\beta}}.$$

Um nun die für den stationären Temperaturzustand der Kugelschale gefundenen Formeln (39. und 40.) auf den gegenwärtigen Fall, wo die beiden Grenzflächen derselben concentrisch sind, und ihren gemeinsamen Mittelpunct in A' haben, anwenden zu können, muss zunächst die Lage näher bestimmt werden, welche die in jenen Formeln vorkommenden Puncte a', b', c'... in Bezug auf den im Innern der Schale beliebig gewählten Punct p gegenwärtig besitzen. Da sich diese Puncte mit p auf *derselben* ω-Curve befinden, so werden dieselben in dem hier betrachteten Fall, wo jene ω-Curven durch die von A' ausgehenden Radien repräsentirt sind, alle mit p auf *ein und d mselben* Radius liegen. Was ferner die ϑ-Coordinate dieser Puncte anbelangt, so können die beiden ersten unter den Formeln (46.) folgendermassen dargestellt werden:

$$e^{\vartheta_{b'}} = e^{\vartheta_p}.e^{\Delta} = e^{\vartheta_p}\frac{e^{\Theta}}{e^{T}}, \qquad e^{\vartheta_{a'}} = \frac{e^{\Theta}}{e^{\vartheta_p}}$$

oder:

$$2ae^{\vartheta_{b'}} = 2ae^{\vartheta_p}.\frac{4a^2e^{\Theta}}{4a^2e^{T}}, \qquad 2ae^{\vartheta_{a'}} = \frac{4a^2e^{\Theta}}{2ae^{\vartheta_p}},$$

wo Θ, T die Parameter der Centra der beiden Grenzflächen, und folglich $\frac{\Theta}{2}$, $\frac{T}{2}$ die Parameter dieser Flächen selber vorstellen. Bezeichnet man daher die *Radien* dieser Flächen mit ϱ und r, so wird für den Fall ($OA = \infty$) zufolge (β.):

$$2ae^{\frac{\Theta}{2}} = \varrho, \qquad 2ae^{\frac{T}{2}} = r$$

und ferner

$$2ae^{\vartheta_p} = r_p, \qquad 2ae^{\vartheta_{b'}} = r_{b'}, \qquad 2ae^{\vartheta_{a'}} = r_{a'},$$

wo r_p, $r_{b'}$, $r_{a'}$ die Abstände der Puncte p, b', a' vom Pole A' vorstellen; so dass die vorstehenden Formeln übergehen in:

$$r_{b'} = r_p\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2, \qquad r_{a'} = \frac{\varrho^2}{r_p}.$$

Behandelt man die übrigen Formeln in (46.) auf gleiche Weise, und setzt dabei zur Abkürzung den *ächten* Bruch

$$(\delta.) \qquad \frac{\varrho}{r} = Q,$$

so ergiebt sich folgendes System von Gleichungen:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{cases} r_{b'} = r_p \cdot Q^2 & r_{a'} = \dfrac{\varrho^2}{r_p} \\ r_{d'} = r_p \cdot Q^4 & r_{c'} = \dfrac{\varrho^2}{r_p} \cdot Q^2 \\ r_{f'} = r_p \cdot Q^6 & r_{e'} = \dfrac{\varrho^2}{r_p} \cdot Q^4 \\ r_{h'} = r_p \cdot Q^8 & r_{g'} = \dfrac{\varrho^2}{r_p} \cdot Q^6 \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

Die *unter der Voraussetzung constanter Oberflächen-Temperaturen* entwickelte Formel (40. a.) verwandelt sich nun für eine Schale mit concentrischen Grenzflächen zunächst in:

$$V_p = C + (\Gamma - C) \cdot \left(\frac{\sqrt{r_{a'}} + \sqrt{r_{c'}} + \ldots}{\sqrt{r_p}} - \frac{\sqrt{r_{b'}} + \sqrt{r_{d'}} + \ldots}{\sqrt{r_p}} \right),$$

weil in diesem Falle die Parameter ξ (zufolge γ.) proportional mit den Quadratwurzeln der Distanzen r sind. Hieraus aber ergiebt sich, wenn man für die r ihre Werthe (ε.) substituirt:

$$V_p = C + (\Gamma - C) \cdot \left\{ (1 + Q + Q^2 + \ldots) \frac{\varrho}{r_p} - (Q + Q^2 + Q^3 + \ldots) \right\}$$

d. i.

$$V_p = C + (\Gamma - C) \frac{\frac{\varrho}{r_p} - Q}{1 - Q},$$

oder durch Restitution des Werthes von Q (δ.):

$$V_p = C + (\Gamma - C) \frac{\frac{\varrho}{r_p} - \frac{\varrho}{r}}{1 - \frac{\varrho}{r}},$$

ein Ausdruck, der sich schliesslich durch bessere Anordnung seiner Glieder in:

$$(\zeta.)\qquad V_p = C \cdot \frac{r}{r_p} \frac{r_p - \varrho}{r - \varrho} + \Gamma \cdot \frac{\varrho}{r_p} \cdot \frac{r_p - r}{r - \varrho}$$

verwandelt.

Um ferner die *im Allgemeinen, nämlich unter der Voraussetzung nicht constanter Oberflächen-Temperaturen* entwickelte Formel (43.) auf den Fall einer Schale mit concentrischen Begrenzungsflächen zu übertragen, ist zunächst zu beachten, dass die Puncte a', b', c'... gegenwärtig sämmtlich auf dem Radius $\overline{A'p}$ liegen, und dass demzufolge einerseits die Winkel

$$\widehat{pA's} \qquad \widehat{a'A's} \qquad \widehat{b'A's} \quad \text{etc.}$$

unter einander *gleich* sind, andererseits auch die Winkel

$$\widehat{pA'\sigma} \qquad \widehat{a'A'\sigma} \qquad \widehat{b'A'\sigma} \quad \text{etc.}$$

gleiche Werthe haben. Die von diesen Winkeln abhängenden in (43.) vorkommenden $P^{(n)}$ und $\Pi^{(n)}$ werden daher ebenfalls *gleiche* Werthe besitzen. D. h. es wird:

$$(\eta.) \qquad P^{(n)}_{ps} = P^{(n)}_{a's} = P^{(n)}_{b's} = P^{(n)}_{c's} = \text{etc.}$$

und andererseits:

$$(\vartheta.) \qquad \Pi^{(n)}_{p\sigma} = \Pi^{(n)}_{a'\sigma} = \Pi^{(n)}_{b'\sigma} = \text{etc.}$$

Da ferner $P^{(n)}_{\alpha\beta}$ von dem Winkel $\widehat{\alpha m \beta}$ in derselben Weise abhängt wie $\Pi^{(n)}_{\alpha\beta}$ vom Winkel $\widehat{\alpha\mu\beta}$, die Centra m, μ der beiden Kugelflächen aber gegenwärtig in *ein und denselben Punct* A' fallen, so ist für den hier vorliegenden Fall auch

$$(\varkappa.) \qquad P^{(n)}_{\alpha\beta} = \Pi^{(n)}_{\alpha\beta}.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen $(\eta.)$, $(\vartheta.)$, $(\varkappa.)$ und mit Rücksicht darauf, dass (nach $\gamma.$) die Parameter ξ proportional sind mit den Quadratwurzeln der Distanzen r, verwandeln sich die Ausdrücke der $L^{(n)}$ und $\varLambda^{(n)}$ (43.) in:

$$r_p^{\frac{1}{2}} L^{(n)} = \left(r_p^{n+\frac{1}{2}} - r_{a'}^{n+\frac{1}{2}} + r_{b'}^{n+\frac{1}{2}} - r_{c'}^{n+\frac{1}{2}} + \ldots\right) \mathsf{S} P^{(n)}_{ps} V_s \, ds$$

$$-r_p^{\frac{1}{2}} \varLambda^{(n)} = \left(r_{a'}^{n+\frac{1}{2}} - r_{b'}^{n+\frac{1}{2}} + r_{c'}^{n+\frac{1}{2}} - r_{d'}^{n+\frac{1}{2}} + \ldots\right) \mathsf{S} P^{(n)}_{p\sigma} V_\sigma \, d\sigma.$$

Zufolge $(\varepsilon.)$ ist nun:

$$r_p^{n+\frac{1}{2}} + r_{b'}^{n+\frac{1}{2}} + r_{d'}^{n+\frac{1}{2}} + \ldots = r_p^{n+\frac{1}{2}}(1 + Q^{2n+1} + Q^{2(2n+1)} + \ldots)$$

$$= \frac{r_p^{n+\frac{1}{2}}}{1 - Q^{2n+1}}$$

$$r_{b'}^{n+\frac{1}{2}} + r_{d'}^{n+\frac{1}{2}} + r_{f'}^{n+\frac{1}{2}} + \ldots = r_p^{n+\frac{1}{2}}(Q^{2n+1} + Q^{2(2n+1)} + Q^{3(2n+1)} + \ldots)$$

$$= \frac{r_p^{n+\frac{1}{2}} Q^{2n+1}}{1 - Q^{2n+1}}$$

$$r_{a'}^{n+\frac{1}{2}} + r_{c'}^{n+\frac{1}{2}} + r_{e'}^{n+\frac{1}{2}} + \ldots = \frac{\varrho^{2n+1}}{r_p^{n+\frac{1}{2}}}(1 + Q^{2n+1} + Q^{2(2n+1)} + \ldots)$$

$$= \frac{\varrho^{2n+1}}{r_p^{n+\frac{1}{2}}(1 - Q^{2n+1})}.$$

Folglich wird:

$$L^{(n)} = \frac{1}{r_p^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{r_p^{2n+1} - \varrho^{2n+1}}{r_p^{n+\frac{1}{2}}(1 - Q^{2n+1})} \mathsf{S} P_{ps}^{(n)} V_s\, ds$$

$$-\Lambda^{(n)} = \frac{1}{r_p^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\varrho^{2n+1} - r_p^{2n+1}\, Q^{2n+1}}{r_p^{n+\frac{1}{2}}(1 - Q^{2n+1})} \mathsf{S} P_{p\sigma}^{(n)} V_\sigma\, d\sigma$$

oder, wenn man den Werth von $Q = \frac{\varrho}{r}$ (δ.) restituirt:

$$L^{(n)} = \frac{r^{2n+1}}{r_p^{n+1}} \frac{r_p^{2n+1} - \varrho^{2n+1}}{r^{2n+1} - \varrho^{2n+1}} \mathsf{S} P_{ps}^{(n)} V_s\, ds$$

$$-\Lambda^{(n)} = \frac{\varrho^{2n+1}}{r_p^{n+1}} \frac{r^{2n+1} - r_p^{2n+1}}{r^{2n+1} - \varrho^{2n+1}} \mathsf{S} P_{p\sigma}^{(n)} V_\sigma\, d\sigma.$$

Substituirt man diese Werthe in (43.), so wird schliesslich:

$$(\lambda.) \quad V_p = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{r^{n-1}}{r_p^{n+1}} \frac{r_p^{2n+1} - \varrho^{2n+1}}{r^{2n+1} - \varrho^{2n+1}} \mathsf{S} P_{ps}^{(n)} V_s\, ds \\ + \frac{\varrho^{n-1}}{r_p^{n+1}} \frac{r_p^{2n+1} - r^{2n+1}}{\varrho^{2n+1} - r^{2n+1}} \mathsf{S} P_{p\sigma}^{(n)} V_\sigma\, d\sigma \end{array} \right\}$$

Zweiter Abschnitt.

---

§. 1. *Allgemeine Transformationen. In den Ausdrücken*

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad \textit{und} \quad (x-x_1)^2 + (y-y_1) + (z-z_1)^2$$

werden an Stelle von x, y, z die Parameter dreier orthogonaler Flächensysteme eingeführt, von welchen zwei aus Rotationsflächen bestehen und das dritte durch die Meridian-Ebenen dieser Rotationsflächen dargestellt wird.

In dem rechtwinkligen Coordinatensystem (x, y, z) sei x die Achse der Rotationsflächen, also $\overline{xy}$ und $\overline{xz}$ zwei feste gegen einander senkrechte Meridian-Ebenen. Eine dritte Meridian-Ebene von variabler Lage mag mit $\overline{x\mathfrak{y}}$ bezeichnet werden, wo $\mathfrak{y}$ diejenige Linie vorstellen soll, in welcher diese Ebene von der $\overline{yz}$-Ebene durchsetzt wird. Es mögen nun x, $\mathfrak{y}$ die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines in der Meridian-Ebene $\overline{x\mathfrak{y}}$ befindlichen Punctes vorstellen, und ϑ, ω zwei Functionen von x, $\mathfrak{y}$ sein, welche durch eine Gleichung von der Form

$$(76.) \qquad x + i\mathfrak{y} = f(\vartheta + i\omega), \qquad (i = \sqrt{-1})$$

definirt sind. Unter f soll dabei irgend welche gegebene Function verstanden werden. Setzt man ϑ und ω gleich willkürlichen Constanten:

$$\vartheta = \text{Const.}, \qquad \omega = \text{Const.},$$

so werden dies die Gleichungen zweier orthogonalen Curvensysteme sein, welche in der $\overline{x\mathfrak{y}}$-Ebene liegen.

Es soll sich nun hier um zwei Systeme von Rotationsflächen handeln, von welchen das eine die Curven $\vartheta = \text{Const.}$, das andere die Curven $\omega = \text{Const.}$ zu Meridianen hat, und um ein drittes Flächensystem, wel-

ches aus den Meridian-Ebenen selber besteht. Die Parameter dieser drei Flächensysteme werden ϑ, ω, φ sein, falls man unter φ den Winkel versteht, welchen irgend eine jener Meridian-Ebenen mit der xy-Ebene macht.

Versteht man nun unter x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punctes a, unter $\mathfrak{y}$ den Abstand dieses Punctes von der Rotationsachse, endlich unter ϑ, ω, φ die Parameter der drei Flächen, welche durch a hindurchgehen, so findet zwischen x, $\mathfrak{y}$ und ϑ, ω der durch (76.) repräsentirte Zusammenhang statt, welcher sich auch so darstellen lässt:

$$(*)\quad \begin{cases} x = \dfrac{f(\vartheta+i\omega)+f(\vartheta-i\omega)}{2} \\[2ex] \mathfrak{y} = \dfrac{f(\vartheta+i\omega)-f(\vartheta-i\omega)}{2i}; \end{cases}$$

und andererseits finden dann zwischen y, z und $\mathfrak{y}$, φ die Relationen statt:

$$(**)\quad \begin{cases} y = \mathfrak{y}\cos\varphi \\ z = \mathfrak{y}\sin\varphi. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(77.)\quad \begin{cases} f(\vartheta+i\omega) = f & f(\vartheta-i\omega) = F \\[1ex] \dfrac{df(\vartheta+i\omega)}{d(\vartheta+i\omega)} = f' & \dfrac{df(\vartheta-i\omega)}{d(\vartheta-i\omega)} = F', \end{cases}$$

so ergeben sich, aus (*) und (**) durch Elimination von $\mathfrak{y}$, *für den Zusammenhang, der zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und den neuen Coordinaten ϑ, ω, φ stattfindet*, schliesslich folgende Formeln:

$$(78.)\quad \begin{cases} x = \dfrac{f+F}{2}, \\[2ex] y = \dfrac{f-F}{2i}\cos\varphi \\[2ex] z = \dfrac{f-F}{2i}\sin\varphi. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$(78.\text{a.})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\vartheta} = \dfrac{f'+F'}{2}, & \dfrac{\partial x}{\partial\omega} = i\dfrac{f'-F'}{2}, & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial\vartheta} = \dfrac{f'-F'}{2i}\cos\varphi, & \dfrac{\partial y}{\partial\omega} = i\dfrac{f'+F'}{2i}\cos\varphi, & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} = -\dfrac{f-F}{2i}\sin\varphi, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial\vartheta} = \dfrac{f'-F'}{2i}\sin\varphi, & \dfrac{\partial z}{\partial\omega} = i\dfrac{f'+F'}{2i}\sin\varphi, & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} = \dfrac{f-F}{2i}\cos\varphi. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \partial \varphi \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \\ dz = \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial z}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi \end{cases}$$

folgt, wenn man

$$(79.) \quad \begin{cases} \Theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2 \\ \Omega = \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2 \\ \Phi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 \end{cases}$$

d. i. nach (78. a.):

$$(80.) \quad \begin{cases} \Theta = \left(\frac{f' + F'}{2}\right)^2 - \left(\frac{f' - F'}{2}\right)^2 = f'F' \\ \Omega = -\left(\frac{f' - F'}{2}\right)^2 + \left(\frac{f' + F'}{2}\right)^2 = f'F' \\ \Phi = -\left(\frac{f - F}{2}\right)^2 \end{cases}$$

setzt:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \Theta\, d\vartheta^2 + \Omega\, d\omega^2 + \Phi\, d\varphi^2$$
$$+ 2\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \omega} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\frac{\partial z}{\partial \omega}\right) d\vartheta\, d\omega + \text{etc.},$$

oder, wenn man beachtet, dass die Flächen mit den Parametern ϑ, ω, φ einander senkrecht durchschneiden, dass mithin die hier als Factoren der Producte $d\vartheta . d\omega$, $d\vartheta . d\varphi$, $d\omega . d\varphi$ auftretenden Ausdrücke Null sind:

$$(81.) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \Theta\, d\vartheta^2 + \Omega\, d\omega^2 + \Phi\, d\varphi^2.$$

Hiermit ist für das Linien-Element $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, welches zwei unendlich nahe Puncte (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ mit einander verbindet, ein Ausdruck gefunden, der von den *neuen* Coordinaten $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta + d\vartheta, \omega + d\omega, \varphi + d\varphi)$ jener Puncte abhängt. Vermittelst dieser Formel (81.) lässt sich nun, falls W irgend welche Function von x, y, z vorstellt, das Aggregat

$$\Delta W \text{ oder } \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

sofort in einen Ausdruck transformiren, welcher an Stelle der Coordinaten x, y, z die neuen Coordinaten ϑ, ω, φ enthält. Unter Anwendung der in jener Formel auftretenden Factoren

$$\Theta, \quad \Omega, \quad \Phi$$

und der davon abhängigen Wurzelgrösse

$$(82.) \qquad P = \sqrt{\Theta . \Omega . \Phi}$$

ergiebt sich nämlich für die in Rede stehende Transformation folgendes Resultat:

$$(83.) \qquad P . \Delta W = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{P}{\Theta}\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{P}{\Omega}\frac{\partial W}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\Phi}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right);$$

wie solches von Jacobi durch eine der Variations-Rechnung entlehnte Methode allgemein, nämlich für drei ganz *beliebige* orthogonale Flächensysteme dargethan ist (Jacobi, Math. Werke Bd. II. pag. 40—43).

Zufolge (82.) und (80.) wird:

$$P = i f' F' \frac{f - F}{2}.$$

Substituirt man diesen Werth von P und die in (80.) für Θ, Ω, Φ angegebenen in die Formel (83.), so geht dieselbe schliesslich über in:

$$(84.) \qquad f' F' \frac{f - F}{2} . \Delta W = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{f - F}{2}\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{f - F}{2}\frac{\partial W}{\partial \omega}\right) - \frac{2 f' F'}{f - F}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}.$$

Aus der Formel (81.) ergeben sich noch andere Folgerungen, die später von Nutzen sein werden. Versteht man nämlich unter dw das Weg-Element, welches der Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ durchläuft, sobald man gleichzeitig ϑ um $d\vartheta$, ω um $d\omega$ und φ um $d\varphi$ zunehmen lässt, so ergiebt sich aus (81.)

$$dw = \sqrt{\Theta\, d\omega^2 + \Omega\, d\omega^2 + \Phi\, d\varphi^2}$$

d. i. nach (80.):

$$dw = \sqrt{f' F' (d\vartheta^2 + d\omega^2) - \left(\frac{f - F}{2} . d\varphi\right)^2}.$$

Bezeichnet man daher mit dw_ϑ, dw_ω, dw_φ diejenigen drei Weg-Elemente, welche der Punct successive jedesmal vom Orte $(\vartheta, \omega, \varphi)$ aus durchlaufen

wird, falls man beim ersten Mal ϑ um $d\vartheta$, beim zweiten Mal ω um $d\omega$, endlich beim dritten Mal φ um $d\varphi$ anwachsen, und jedesmal die beiden andern Coordinaten ungeändert lässt; so wird:

$$\begin{cases} dw_\vartheta = d\vartheta\sqrt{\Theta} = d\vartheta\,.\sqrt{fF} \\ dw_\omega = d\omega\sqrt{\Omega} = d\omega\,.\sqrt{fF} \\ dw_\varphi = d\varphi\sqrt{\Phi} = d\varphi\,.\,i\dfrac{f-F}{2} \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$(85.)\quad \begin{cases} dw_\omega . dw_\varphi = d\omega\, d\varphi\,.\,\dfrac{i(f-F)\sqrt{fF}}{2} \\ \dfrac{d\vartheta}{dw_\vartheta} = \dfrac{1}{\sqrt{fF}}\,. \end{cases}$$

(85. a.) Diese Formeln haben in Bezug auf die ϑ-Flächen d. i. in Bezug auf jede durch eine Gleichung von der Form $\vartheta =$ Const. dargestellte Rotationsfläche eine einfache Bedeutung. Da nämlich die kleinen Linien dw_ω, dw_φ in der Fläche $\vartheta =$ Const. liegen, und dw_ϑ senkrecht gegen diese Fläche steht, so wird das Product $dw_\omega . dw_\varphi$ den Flächen-Inhalt eines Rechteckes vorstellen, welches als das *Element jener Fläche* angesehen werden kann, und andererseits $\dfrac{d\vartheta}{dw_\vartheta}$ den *Differential-Quotienten von ϑ nach der Normale jener Fläche* repräsentiren.

Sind ϑ, ω, φ und ϑ_1, ω_1, φ_1 die neuen Coordinaten für irgend zwei Puncte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1), so ist nach (78.)

$$(86.)\quad \begin{cases} x = \dfrac{f+F}{2} \\ y = \dfrac{f-F}{2i}\cos\varphi \\ z = \dfrac{f-F}{2i}\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{f_1+F_1}{2} \\ y_1 = \dfrac{f_1-F_1}{2i}\cos\varphi_1 \\ z_1 = \dfrac{f_1-F_1}{2i}\sin\varphi_1\,, \end{cases}$$

wo nach (77.) f, F, f_1, F_1 zur Abkürzung stehen für folgende Ausdrücke

$$\begin{cases} f = f(\vartheta + i\omega) \\ F = f(\vartheta - i\omega) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f_1 = f(\vartheta_1 + i\omega_1) \\ F_1 = f(\vartheta_1 - i\omega_1). \end{array}$$

Daraus folgt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{f+F}{2}\right)^2 - \left(\frac{f-F}{2}\right)^2 = fF$$

und ebenso

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = f_1 F_1.$$

Demnach ergiebt sich für das Quadrat der Entfernung der beiden Puncte (x, y, z) *und* (x_1, y_1, z_1) *folgender Ausdruck:*

$$(86.\text{a.})\quad \begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 \\ = (fF + f_1 F_1) - 2\left(\frac{f+F}{2}\,\frac{f_1+F_1}{2} - \frac{f-F}{2}\,\frac{f_1-F_1}{2}\cos(\varphi-\varphi_1)\right) \end{cases}$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die eben ausgeführten Transformationen bei *besondern* Annahmen über die Function f in (76.) gestalten.

Erstens. *An Stelle der Formel* $x + i\mathfrak{y} = f(\vartheta + i\omega)$ *wird die Formel*

$$x + i\mathfrak{y} = a\,\frac{1 + e^{\vartheta + i\omega}}{1 - e^{\vartheta + i\omega}}$$

zu Grunde gelegt.

Dann wird nach (77.):

$$f = a\,\frac{1 + e^{\vartheta + i\omega}}{1 - e^{\vartheta + i\omega}} \qquad F = a\,\frac{1 + e^{\vartheta - i\omega}}{1 - e^{\vartheta - i\omega}}$$

$$f' = 2a\,\frac{e^{\vartheta + i\omega}}{(1 - e^{\vartheta + i\omega})^2} \qquad F' = 2a\,\frac{e^{\vartheta - i\omega}}{(1 - e^{\vartheta - i\omega})^2}$$

folglich, wenn man zur Abkürzung $e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega = \psi$ setzt:

$$\frac{f-F}{2} = \frac{2i\sin\omega}{\psi} \qquad f.F = a^2\,\frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} + 2\cos\omega}{\psi}$$

$$\frac{f+F}{2} = a\,\frac{e^{-\vartheta} - e^{\vartheta}}{\psi} \qquad f'F' = \frac{4a^2}{\psi^2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe von f, F etc. erhält man aus den Formeln (86.), (86. a.), und sodann aus den Formeln (84.), (85.) die in folgender Tafel zusammengestellten Transformationen:

(87.)

a. *Bezeichnungen:*

$\psi = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega,$
$\psi_1 = e^{\vartheta_1} + e^{-\vartheta_1} - 2\cos\omega_1.$

ϱ und ϱ' die Abstände des Punctes $(\vartheta, \omega, \varphi)$ oder (x, y, z) von den beiden Polen A und A'.

dw_ϑ, dw_ω, dw_φ die Wegelemente, welche der Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ durchläuft, wenn von seinen Coordinaten respective *allein* ϑ um $d\vartheta$, oder *allein* ω um $d\omega$, oder *allein* φ um $d\varphi$ anwächst.

b.

$$x = a\,\frac{e^{-\vartheta} - e^{\vartheta}}{\psi}, \quad y = a\,\frac{\sin\omega}{\psi}\cos\varphi, \quad z = a\,\frac{\sin\omega}{\psi}\sin\varphi$$

$$e^{2\vartheta} = \frac{(x-a)^2 + y^2 + z^2}{(x+a)^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{2a\sqrt{y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2-a^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{y}$$

$$e^{\vartheta} = \frac{\varrho'}{\varrho}, \quad \psi = \frac{4a^2}{\varrho\cdot\varrho'}$$

c.

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = 4a^2\,\frac{\left(e^{\vartheta-\vartheta_1} + e^{\vartheta_1-\vartheta}\right) - 2\left[\cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right]}{\psi\cdot\psi_1}$$

d.

$$\frac{4a^2\sin\omega}{\psi^3}\,\Delta W = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sin\omega}{\psi}\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\sin\omega}{\psi}\frac{\partial W}{\partial\omega}\right) + \frac{1}{\psi\sin\omega}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}$$

e.

$$dw_\omega\cdot dw_\varphi = \pm\frac{4a^2\sin\omega}{\psi^2}\,d\omega\,d\varphi, \qquad \frac{d\vartheta}{dw_\vartheta} = \pm\frac{\psi}{2a}$$

Zweitens. *An Stelle der allgemeinen Formel* $x + i\mathfrak{y} = f(\vartheta + i\omega)$ *wird die Relation*

$$x + i\mathfrak{y} = -\frac{1}{\lambda + i\mathfrak{s}}$$

zu Grunde gelegt, wo die neuen Variablen nicht mehr mit ϑ, ω, *sondern mit den Buchstaben* λ, $\mathfrak{s}$ *bezeichnet sind.*

Nach (77.) wird hier:

$$f = -\frac{1}{\lambda + i\varepsilon} \qquad F = -\frac{1}{\lambda - i\varepsilon}$$

$$f' = \frac{1}{(\lambda + i\varepsilon)^2} \qquad F' = \frac{1}{(\lambda - i\varepsilon)^2},$$

folglich, wenn man zur Abkürzung $\lambda^2 + \varepsilon^2 = \psi$ setzt:

$$\frac{f - F}{2} = \frac{i\varepsilon}{\psi} \qquad f.F = \frac{1}{\psi}$$

$$\frac{f + F}{2} = \frac{-\lambda}{\psi} \qquad f'.F' = \frac{1}{\psi^2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe von f, F, etc. erhält man aus den Formeln (86.), (86. a.), und sodann aus den Formeln (84.), (85.) die in folgender Tafel zusammengestellten Transformationen:

(88.)

a. ***Bezeichnungen:*** $\psi = \lambda^2 + \varepsilon^2$, $\psi_1 = \lambda_1^{\,2} + \varepsilon_1^{\,2}$.
dw_λ, dw_ε, dw_φ die Wegelemente, welche der Punct $(\lambda, \varepsilon, \varphi)$ durchläuft, wenn von seinen Coordinaten respective *allein* λ um $d\lambda$, oder *allein* ε um $d\varepsilon$, oder *allein* φ um $d\varphi$ anwächst.

b.
$$\begin{cases} x = \dfrac{-\lambda}{\psi} \\ y = \dfrac{\varepsilon}{\psi}\cos\varphi \\ z = \dfrac{\varepsilon}{\psi}\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{-x}{x^2+y^2+z^2} \\ \varepsilon = \dfrac{\sqrt{y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{z}{y} \end{cases} \qquad \psi = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

c.
$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = \\ = \dfrac{(\lambda-\lambda_1)^2 + [\varepsilon^2 + \varepsilon_1^{\,2} - 2\varepsilon\,\varepsilon_1 \cos(\varphi - \varphi_1)]}{\psi . \psi_1} \end{cases}$$

d.
$$\frac{\varepsilon}{\psi^3}\Delta W = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\frac{\partial W}{\partial\varepsilon}\right) + \frac{1}{\psi\varepsilon}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}$$

e.
$$\begin{cases} dw_\varepsilon\, dw_\varphi = \pm\dfrac{\varepsilon}{\psi^2}\, d\varepsilon\, d\varphi, \qquad \dfrac{d\lambda}{dw_\lambda} = \pm\psi \\ dw_\lambda\, dw_\varphi = \pm\dfrac{\varepsilon}{\psi^2}\, d\lambda\, d\varphi, \qquad \dfrac{d\varepsilon}{dw_\varepsilon} = \pm\psi \end{cases}$$

§. 2. *Zurückführung des Problemes des stationären Temperaturzustandes für einen beliebig gestalteten homogenen Körper auf die Ermittelung der Green'schen Function.*

Wir wollen uns einen homogenen Körper denken, dessen Begrenzung aus beliebig vielen, beliebig gelegenen und beliebig gestalteten Flächen besteht; in Betreff der Ausdehnung des Körpers nach Aussen hin jedoch voraussetzen, dass derselbe entweder nach *allen* Richtungen hin bis zu gegebenen festen Grenzen reicht, oder nach *allen* Richtungen hin ins Unendliche fortgeht.

Dieser Körper, dessen Temperatur, wie wir annehmen wollen, zu Anfang überall Null war, werde an allen Stellen seiner Begrenzung mit Wärmequellen von gegebener und unveränderlicher Temperatur in Contact gebracht; es handelt sich darum, den stationären Temperaturzustand zu ermitteln, welcher in demselben unter diesen Umständen schliesslich eintreten wird.

Für ein und denselben Körper bieten sich hier *unendlich viele* Aufgaben dar, von einander verschieden durch verschiedene Temperaturen der gegebenen Wärmequellen an der Begrenzung. Alle diese Aufgaben lassen sich, wie gegenwärtig gezeigt werden soll, auf *eine einzige* unter ihnen zurückführen.

Man denke sich nämlich irgendwo im Körper einen festen Punct 1, und jedes zur Begrenzung gehörige Flächenelement $d\omega$ mit einer Wärmequelle in Contact, *deren Temperatur gleich der reciproken Entfernung zwischen $d\omega$ und 1 ist.* Besitzt man nun die Mittel, um für diesen besondern Fall den stationären Temperaturzustand zu bestimmen; so ist man auch im Stande, jede der vorhin erwähnten unendlich vielen Aufgaben zu lösen.

Diese Behauptung, deren Richtigkeit sich sogleich erweisen wird, lautet, in die Analysis übersetzt, folgendermassen:

Die Aufgabe:

(89.) Eine Function $V = V(x, y, z)$ zu finden, welche im Innern des Körpers die Hauptbedingungen (10.) erfüllt, und an der Begrenzung desselben beliebig gegebene Werthe besitzt.

lässt sich zurückführen auf die

(90.) Ermittelung einer Function $G = G(x, y, z)$, welche erstens im Innern des Körpers ebenfalls den Hauptbedingungen Genüge leistet, und welche zweitens, sobald der Punct (x, y, z) in die Begrenzung des Körpers fällt, gleichwerthig wird mit folgendem Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}},$$

wo (x_1, y_1, z_1) die Coordinaten eines festen Punctes sind, der irgendwo im Körper angenommen ist.

In der That lässt sich die Aufgabe (89.), *falls die Function* G (90.) *bekannt ist, in folgender Weise lösen*: Wir bezeichnen den Punct (x_1, y_1, z_1) mit 1, den Ort irgend eines Flächen-Elementes $d\omega$, welches zur Begrenzung des Körpers gehört, mit $(x_\omega, y_\omega, z_\omega)$ oder ω, die Werthe der Functionen V, G in diesen Puncten mit V_1, G_1, V_ω, G_ω, endlich den reciproken Werth der Entfernung zwischen 1 und ω mit $T_{1\omega}$. Dann ist zufolge der über G gemachten Voraussetzungen (90.):

$$G_\omega = \frac{1}{\sqrt{(x_\omega-x_1)^2+(y_\omega-y_1)^2+(z_\omega-z_1)^2}}$$

d. i.

$$(90.a.) \qquad G_\omega = T_{1\omega};$$

ferner, weil V und G innerhalb des Körpers die Haupt-Bedingungen erfüllen [durch Anwendung der Theoreme (11.) und (12.)]:

$$(90.b.) \quad \begin{cases} 0 = \int\left(G_\omega \dfrac{dV_\omega}{dN} - V_\omega \dfrac{dG_\omega}{dN}\right) d\omega \\ 4\pi V_1 = \int\left(T_{1\omega} \dfrac{dV_\omega}{dN} - V_\omega \dfrac{dT_{1\omega}}{dN}\right) d\omega, \end{cases}$$

wo die Integration über alle Flächen-Elemente $d\omega$ ausgedehnt ist, aus welchen die Begrenzung des Körpers besteht, und N diejenige Richtung der auf $d\omega$ errichteten Normale vorstellt, welche aus dem Körper in den angrenzenden Raum hineinläuft. Durch Subtraction der Formeln (90.b.) ergiebt sich mit Rücksicht auf (90.a.) sofort:

$$(90.c.) \quad 4\pi V_1 = \int\left(\frac{dG_\omega}{dN} - \frac{dT_{1\omega}}{dN}\right) V_\omega \, d\omega.$$

Da V_ω die gegebenen Werthe repräsentirt, welche V an der Begrenzung des Körpers besitzen soll, also eine *gegebene* Function darstellt, ferner $T_{1\omega}$ an und für sich eine *bekannte* Function ist, so wird man die vorstehende Formel, falls die Ermittelung der Function G auf irgend welche Weise geglückt ist, sofort zur Berechnung von V_1, d. h. zur Berechnung desjenigen Werthes benutzen können, welchen die gesuchte Function V in dem beliebig gewählten Puncte 1 besitzt. Somit ist die oben (in 89. und 90.) gemachte Behauptung als richtig erwiesen.

Die Function G ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre Beschaffenheit allein von g e o m e t r i s c h e n Verhältnissen abhängt. Alles zu ihrer Definition Erforderliche ist nämlich (nach 90.) vollständig bekannt, sobald erstens die *Gestalt* gegeben ist, welche der Körper besitzt, und zweitens der *Ort* gegeben ist, welchen der feste Punct $(x_1, y_1; z_1)$ oder 1 im Körper einnimmt. Ich werde dieselbe die *Green'sche Function* und den festen Punct 1 ihren *Centralpunct* nennen.*) Da jeder andern Lage von 1 eine andere Beschaffenheit der Function G entspricht, so wird es zweckmässig sein, solches in die Bezeichnung derselben mit aufzunehmen und die dem Centralpunct 1 zugehörige Green'sche Function mit $G^{(1)}$ zu bezeichnen.

Wir haben alsdann folgende *Definition*:

(91.) *Die einem gegebenen Körper und einem gegebenen Centralpunct 1 zugehörige Green'sche Function $G^{(1)} = G^{(1)}(x, y, z)$ ist dadurch definirt, dass sie e r s t e n s innerhalb des Körpers die Hauptbedingungen* (10.) *erfüllt, und dadurch, dass sie, z w e i t e n s, sobald der Punct (x, y, z) in irgend eine Stelle ω der Körper-Begrenzung zu liegen kommt, mit dem reciproken Werth des von dem Centralpunct nach ω gezogenen Radius-vectors gleichwerthig wird.*

---

*) Ich nenne die Function die *Green*'sche, weil die Wichtigkeit, welche sie gegenwärtig in mehreren Gebieten der mathematischen Physik besitzt, zuerst in den von *Green* über die Vertheilung der Elektricität angestellten Untersuchungen sich geltend machte. (Man sehe „G. Green: An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism." Crelle's Journal f. M. Bd. 39, 44 und 47.)

Ferner haben wir dann nach (90. c.), um in einem Körper, der an allen Stellen seiner Begrenzung mit beliebig gegebenen und unveränderlichen Wärmequellen in Contact gesetzt ist, die Temperatur nach Eintritt des stationären Zustandes zu bestimmen, folgende, falls die Ermittelung der Green'schen Function möglich ist, immer ausführbare *Methode*:

(92.) *Man bilde die Green'sche Function für irgend einen Punct* 1 *des Körpers als Centralpunct, bezeichne den Werth derselben in irgend einer Stelle* ω *der Körperbegrenzung mit* $G_\omega^{(1)}$, *ferner den reciproken Werth der zwischen* 1 *und* ω *vorhandenen Entfernung mit* $T_{1\omega}$, *und bilde die Differential-Quotienten:*

$$\frac{dG_\omega^{(1)}}{dN} \qquad \frac{dT_{1\omega}}{dN}$$

wo $dG_\omega^{(1)}$, $dT_{1\omega}$ *die unendlich kleinen Zuwächse vorstellen, welche* $G_\omega^{(1)}$, $T_{1\omega}$ *erhalten würden, sobald der Punct* ω *die Begrenzungsfläche des Körpers verlassen und sich längst der in* ω *errichteten Normale um die Strecke dN vom Körper entfernen wollte.*

Bezeichnet man dann mit $H_\omega^{(1)}$ *die Differenz dieser beiden Differential-Quotienten*

$$H_\omega^{(1)} = \frac{dG_\omega^{(1)}}{dN} - \frac{dT_{1\omega}}{dN},$$

so wird die nach Eintritt des stationären Zustandes im Puncte 1 *herrschende Temperatur* V_1 *folgenden Werth haben:*

$$(*) \qquad 4\pi V_1 = \mathsf{S} H_\omega^{(1)} V_\omega \, d\omega,$$

wo $d\omega$ *das bei* ω *liegende zur Begrenzung gehörige Flächenelement, ferner* V_ω *die für* $d\omega$ *gegebene Temperatur vorstellt, und wo endlich die Integration über die ganze Begrenzung des Körpers ausgedehnt ist.*

(92. a.) Besteht die Begrenzung des Körpers aus *mehreren* von einander gesonderten Flächen, so wird das für V_1 aufgestellte Integral (*) successive zuerst über alle Elemente der ersten, dann über alle Elemente der zweiten, dritten Fläche u. s. w. auszudehnen sein, also in eine *Summe* von Integralen übergehen. Zugleich wird es dann auch verschiedener Operationen bedürfen, um den Ausdruck $H_\omega^{(1)}$ für die einzel-

nen Flächen zu bilden. Besteht z. B., wie das bei der Aufgabe der Fall ist, um die es sich hier handelt, die Begrenzung aus *zwei* Flächen, und bezeichnet man irgend einen Punct der einen mit s, irgend einen der andern mit σ, so wird man die Ausdrücke

$$H_s^{(1)} = \frac{dG_s^{(1)}}{dN} - \frac{dT_{1s}}{dN} \qquad H_\sigma^{(1)} = \frac{dG_\sigma^{(1)}}{d\mathfrak{N}} - \frac{dT_{1\sigma}}{d\mathfrak{N}}$$

bilden müssen, und dann für V_1 folgenden Werth haben:

$$4\pi V_1 = \int H_s^{(1)} V_s\, ds + \int H_\sigma^{(1)} V_\sigma\, d\sigma,$$

wo ds, $d\sigma$ zwei respective bei s und σ liegende Flächen-Elemente der Begrenzung des Körpers vorstellen, und N, $\mathfrak{N}$ diejenigen auf ds, $d\sigma$ errichteten Normalen bezeichnen, welche aus dem Körper in den angrenzenden Raum hineinlaufen.

Hiemit ist der Plan, nach welchem wir im Folgenden zur Bestimmung des stationären Temperaturzustandes bei einem von zwei Kugelflächen begrenzten Körper verfahren werden, in seinen Hauptumrissen dargelegt. In §. 3 wird die Aufgabe unter der Voraussetzung behandelt werden, dass die beiden gegebenen Kugelflächen einander *nicht* berühren, sodann in §. 4 unter der Voraussetzung, dass eine Berührung stattfindet. Diese beiden Fälle müssen nämlich von einander getrennt werden, weil es *einmal* in beiden verschiedener Coordinaten bedarf, im ersten Fall der in (13.) bis (22.) untersuchten Coordinaten ϑ, ω, im zweiten Fall der in (61.) bis (68.) besprochenen Coordinaten λ, ε, *andererseits* aber auch die in beiden Fällen zur Integration der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ erforderlichen Functionen verschiedene sind; im ersten Fall ist hierzu die Laplace'sche Function $\overset{(n)}{P}(x)$ (2. a.), im zweiten Fall die Bessel'sche Function $J(x)$ (4. a.) nothwendig. Weitere Unterabtheilungen in jedem der genannten beiden Fälle zu machen, wird nicht erforderlich sein; vielmehr wird in jedem derselben die Methode der Lösung *dieselbe* sein, mag von den beiden Kugelflächen die eine ausserhalb oder die eine innerhalb der andern liegen.

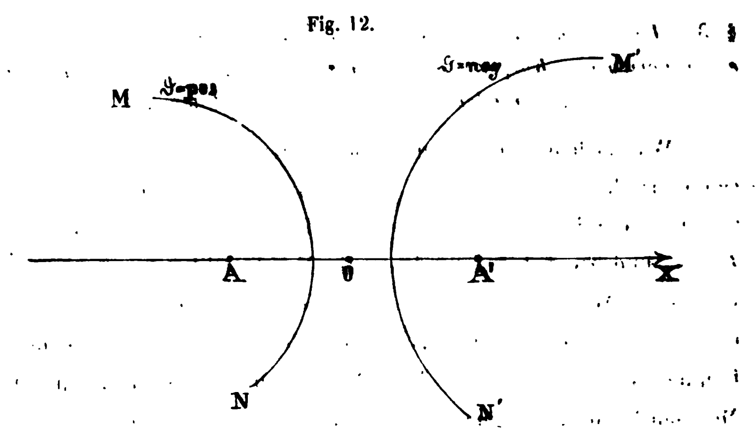
§. 3. *Lösung des Problemes des stationären Temperatur-Zustandes für einen homogenen Körper, welcher von irgend zwei einander nicht berührenden Kugelflächen begrenzt wird.*

Wir bedienen uns eines Coordinatensystemes (ϑ, ω, φ), welches symmetrisch ist in Bezug auf die x-Achse, und bezeichnen in Folge dessen jede durch diese Achse gehende Ebene mit dem Namen *Meridian-Ebene*, und zwar der Art, dass jede Meridian-Ebene auf der einen Seite von der x-Achse *begrenzt* gedacht wird, so dass eine Drehung derselben um 360° erforderlich wird, sobald dieselbe sämmtliche Theile des ganzen Raumes durchlaufen soll. Der Winkel, unter welchem eine beliebige Meridian-Ebene gegen die feste xy-Ebene geneigt ist, soll φ, der Durchschnitt der Meridian-Ebene mit der yz-Ebene soll $\mathfrak{y}$, endlich die Ebene selber die $x\mathfrak{y}$-Ebene genannt werden. Ist φ gegeben, so bedarf es, um die Lage eines Punctes in der dadurch bestimmten Meridian-Ebene festzusetzen, noch zweier Angaben. Diese können entweder darin bestehen, dass die Coordinaten x, $\mathfrak{y}$ gegeben werden, welche der Punct in jener Meridian-Ebene haben soll, oder auch darin, dass irgend zwei andere Grössen gegeben werden, welche Functionen von x, $\mathfrak{y}$ sind. Wir bedienen uns zu diesem Zweck der früher in (15.) bis (26.) untersuchten, und durch die Formel

$$(93.)\qquad x+i\mathfrak{y} = a\frac{1+e^{\vartheta+i\omega}}{1-e^{\vartheta+i\omega}}$$

definirten Functionen ϑ, ω. Die Gleichungen $\vartheta =$ Const. stellen dann Kreise, oder, wenn alle Meridian-Ebenen gleichzeitig betrachtet werden, Kugelflächen dar, welche ihre Mittelpuncte in der x-Achse haben. Bezeichnet man wieder zwei feste Puncte A, A', welche links und rechts in der Entfernung a vom Anfangspunct O auf der x-Achse liegen, mit dem Namen *Pole*, so wird die Kugelfläche $\vartheta =$ Const. den Pol A oder den Pol A' umschliessen (Fig. 12.), je nachdem die Const. einen positiven oder negativen Werth hat. Lässt man $\vartheta = +\infty$ werden, so schrumpft die Kugelfläche MN zum Puncte A, und lässt man andererseits $\vartheta = -\infty$ werden, so schrumpft die Fläche $M'N'$ zum Puncte A' zusammen. Wir können deshalb die Pole A, A' selber als unendlich kleine

Fig. 12.



Kugeln mit den Parametern $\vartheta = +\infty$, $\vartheta = -\infty$ definiren, und demgemäss jede Kugelfläche mit positivem ϑ als eine den Pol ($\vartheta = +\infty$), jede Kugelfläche mit negativem ϑ als eine den Pol ($\vartheta = -\infty$) umschliessende Fläche bezeichnen. Auf der Grenze dieser beiden Gattungen von Flächen steht die durch die yz-Ebene dargestellte unendlich grosse Kugelfläche mit dem Parameter $\vartheta = 0$. Der Körper, um dessen Untersuchung es sich hier handelt, sei von irgend zwei solchen Kugelflächen mit den Parametern $\vartheta = \tau$ und $\vartheta = t$ begrenzt, und zwar soll

(94.) $$-\infty < \tau < t < +\infty$$

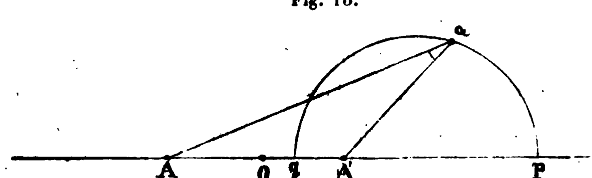
sein, übrigens aber dahingestellt bleiben, ob τ und t gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Im ersten Fall werden dann beide Flächen denselben, im zweiten Fall jede einen andern Pol umschliessen; so dass der Körper im ersten Fall die Form einer Kugelschale besitzt, im letztern Fall hingegen einen Raum einnimmt, der innerlich von den beiden gegebenen Flächen begrenzt ist, und nach Aussen hin sich überall ins Unendliche ausdehnt.

(94. a.) In jedem der beiden Fälle wird der von dem Körper eingenommene Raum durch diejenigen Kugelflächen, deren Parameter ϑ *zwischen* τ und t liegt, stetig und vollständig erfüllt werden.

(94. b.) *Ferner werden in jedem der beiden Fälle die Pole ausserhalb des gegebenen Körpers liegen.*

(94. c.) Sind φ und ϑ gegeben, so ist damit die Lage einer Meridianebene, und zugleich eine der eben betrachteten Kugelflächen festgesetzt. Um die Lage eines Punctes auf dem Halbkreise, in welchem jene (nur bis zur x-Achse sich erstreckende) Ebene und diese Kugelfläche einander schneiden, zu bestimmen, dient nun endlich die Variable ω. Für irgend einen Punct α repräsentirt ω (zufolge 21.) den Winkel $\widehat{A\alpha A'}$, so dass ω für alle Puncte des eben genannten Halbkreises zwischen 0° und 180° liegt, nämlich von 0° bis 180° wächst, falls der Punct α den Halbkreis vom p bis q hin (Fig. 13.) durchläuft.

Fig. 13.



(94. d.) Man wird also, wie schliesslich bemerkt werden mag, alle Puncte des ganzen unendlichen Raumes haben, wenn man unter ϑ, ω, φ Coordinaten versteht, welche respective von $-\infty$ bis $+\infty$ hin, von 0 bis π hin, und von 0 bis 2π hin variabel sind.

Der Gang meiner Untersuchung wird nun in diesem §. folgender sein:

A. Der reciproke Werth T der Entfernung, welche ein *variabler Punct* (ϑ, ω, φ) von irgend welchem festen Puncte 1 aus hat, wird eine Function der drei Coordinaten ϑ, ω, φ sein. Ich werde diese Function mit $T(\vartheta, \omega, \varphi)$ bezeichnen, dieselbe wirklich bilden, und sie dann in eine Reihe entwickeln:

$$T(\vartheta, \omega, \varphi) = \sum E(\vartheta, \omega, \varphi).$$

Für das allgemeine Glied $E(\vartheta, \omega, \varphi)$ wird sich, falls n seine Ordnungszahl vorstellt, folgender Werth ergeben:

(*) $$E(\vartheta, \omega, \varphi) =$$

$$= C . e^{\pm\frac{2n+1}{2}\vartheta} . \sqrt{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega} . \overset{(n)}{P}[\cos\omega\cos\omega_1+\sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi-\varphi_1)]$$

wo ω_1, φ_1 die ω- und φ-Coordinate des festen Punctes 1 vorstellen.

$P^{(n)}$ die Laplace'sche Function (2.) bezeichnet, und endlich C einen constanten, d. h. einen von ϑ, ω, φ unabhängigen Factor repräsentirt.

B. Nunmehr wird die Natur der Functionen $E(\vartheta, \omega, \varphi)$ näher untersucht. Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des variablen Punctes $(\vartheta, \omega, \varphi)$ mit (x, y, z), so genügt die reciproke Entfernung T bekanntlich der Gleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

Ich weise nach, dass auch jeder einzelne Term E der für T gefundenen Entwickelung dieser Gleichung Genüge leistet, dass nämlich

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

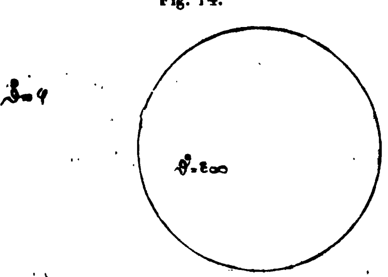
ist. Damit ist dann dargethan, dass jede der Functionen E der *ersten* unter jenen Bedingungen, welche in (10.) unter dem Namen „Haupt-Bedingungen" zusammengefasst wurden, Genüge leistet. Um nun ferner zu untersuchen, in wie weit diese E auch den *übrigen* Haupt-Bedingungen genügen, bedarf es einer Sonderung dieser Functionen in diejenigen beiden Gattungen, welche die Formel (*) successive darbietet, falls man darin dem Exponenten von e einmal das Vorzeichen $+$, und sodann das Vorzeichen $-$ zuertheilt. Ich bezeichne diese beiden Gattungen respective mit $\underset{\smile}{\overset{+}{E}}$ und $\underset{\smile}{\overset{-}{E}}$, und beide zusammengenommen mit $\underset{\smile}{\overset{\varepsilon}{E}}$, wo $\varepsilon = \pm 1$ sein soll. Alsdann zeigt sich, dass die Function $\underset{\smile}{\overset{\varepsilon}{E}}$ sämmtlichen Haupt-Bedingungen im ganzen unendlichen Raume, mit alleiniger Ausnahme des Poles $(\vartheta = \varepsilon\infty)$, allenthalben Genüge leistet.

C. Ich lasse sodann eine Digression über die Natur der Functionen

$$\overset{(n)}{P}[\cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1)]$$

folgen, und weise nach, dass dieselben in Bezug auf das hier zu Grunde gelegte Sytem der ϑ = Kugelflächen Eigenschaften besitzen, die denen, welche Laplace für ein System concentrischer Kugelflächen entdeckt hat, vollständig analog sind. — Im Anschluss hieran ergiebt sich dann auch, dass jede der Functionen $\underset{\smile}{\overset{\varepsilon}{E}}(\vartheta, \omega, \varphi)$ als das Potential irgend einer Kugelfläche angesehen werden kann, welche zum Flächensystem ϑ = Const.

gehört, und unter diesen Flächen so gewählt ist, dass der Pol ($\vartheta = \varepsilon\infty$) *innerhalb*, und der Punct (ϑ, ω, φ) *ausserhalb* derselben liegt (Fig. 14).



Welche Lage nämlich diese ϑ-Kugelfläche im Uebrigen auch haben mag, immer lässt sich dieselbe der Art mit Masse belegen, dass die in Rede stehende Function das Potential ihrer Einwirkung auf den Punct (ϑ, ω, φ) darstellt. Da man demzufolge die Kugel auch so wählen kann, dass sie den Pol ($\vartheta = \varepsilon\infty$) unendlich enge umschliesst, so kann die Function $\overset{\varepsilon}{\overline{\overline{E}}}(\vartheta, \omega, \varphi)$ geradezu als das Potential derjenigen Wirkung bezeichnet werden, welche eine gewisse im Pole ($\vartheta = \varepsilon\infty$) befindliche Masse auf den Punct (ϑ, ω, φ) ausübt.

D. Da (zufolge 94. b.) die beiden Pole immer *ausserhalb* desjenigen Raumes liegen, den der gegebene Körper einnimmt, so werden also die Functionen $E(\vartheta, \omega, \varphi)$ beiderlei Gattung d. h. sowohl die Functionen $\overset{+}{\overline{\overline{E}}}$ als auch die Functionen $\overset{-}{\overline{\overline{E}}}$ *innerhalb* des Körpers überall, ohne Ausnahme, den Haupt-Bedingungen Genüge leisten. Dasselbe wird natürlich auch von jedem Aggregat gelten, welches aus den E beiderlei Gattung auf lineäre Weise zusammengesetzt ist, und in welchem jedes E noch mit einem beliebigen constanten Coefficienten multiplicirt sein kann. Ein solches Aggregat wird daher die erste der beiden Eigenschaften, durch welche in (91.) die Green'sche Function des Körpers charakterisirt ist, bereits von selber besitzen. Dass dasselbe gleichzeitig auch die zweite jener beiden Eigenschaften besitzt, und in Folge dessen mit der Green'schen Function identisch wird, kann man, wie ich zeigen werde, *dadurch* erreichen, dass man über die constanten Coefficienten in geeigneter Weise verfügt, und zugleich *sämmtliche E* beiderlei Gattung in das Aggregat mit aufnimmt, dasselbe also in eine *unendliche Reihe* übergehen lässt. — Ist auf diese Weise die Green'sche Function gefunden, so bedarf es schliesslich nur noch der Ausführung der in (92.) angegebenen Operatio-

nen, um mit Hülfe dieser Function die Lösung des Problemes des stationären Temperaturzustandes in voller Allgemeinheit zu erhalten.

A. Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Puncte.

Setzt man die reciproke Entfernung irgend zweier Puncte 0 und 1 gleich T_{01}, so ist, wenn (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) ihre rechtwinkligen Coordinaten bezeichnen:

$$(95.)\qquad T_{01} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}},$$

also nach (87. c.), wenn $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ die neuen Coordinaten dieser Puncte sind:

(95. a.)

$$T_{01} = \frac{\sqrt{\psi}\cdot\sqrt{\psi_1}}{2a}\,\frac{1}{\sqrt{(e^{\vartheta-\vartheta_1}+e^{\vartheta_1-\vartheta})-2[\cos\omega\cos\omega_1+\sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi-\varphi_1)]}}$$

also mit Hülfe von (1. a.):

(96.)

$$T_{01} = \frac{\sqrt{\psi}\cdot\sqrt{\psi_1}}{2a}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\cdot\overline{\vartheta-\vartheta_1}}\cdot\overset{(n)}{P}[\cos\omega\cos\omega_1+\sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi-\varphi_1)],$$

wo $\overline{\vartheta-\vartheta_1}$ den absoluten Werth der Differenz $\vartheta-\vartheta_1$ vorstellen, also $= \vartheta-\vartheta_1$ oder $= \vartheta_1-\vartheta$ sein soll, je nachdem $\vartheta > \vartheta_1$ oder $\vartheta_1 > \vartheta$ ist. — Ebenso wie die reciproke Entfernung T mit den beiden Indices 0 und 1 versehen wurde, um sie als eine von der Lage der beiden Puncte 0 und 1 abhängige Function zu bezeichnen; ebenso werde ich auch den Ausdruck

$$(97.)\qquad \overset{(n)}{P}[\cos\omega\cos\omega_1+\sin\omega\sin\omega_1\sin(\varphi-\varphi_1)] = \overset{(n)}{P}_{01}$$

setzen, um dadurch die Abhängigkeit dieses Ausdruckes von der Lage jener beiden Puncte hervorzuheben. Wie man sieht, ist übrigens $\overset{(n)}{P}_{01}$ nur von den ω- und φ-Coordinaten der beiden Puncte abhängig, von ihren ϑ-Coordinaten dagegen unabhängig. D. h. der Werth der Function $\overset{(n)}{P}_{01}$ bleibt, wenn man den Punct 0 längs der durch ihn hindurchgehenden, senkrechten Trajectorie der ϑ-Flächen fortrücken lässt, ungeändert, und ebenso auch dann ungeändert, wenn man auf analoge Weise mit dem

Punct 1 verfährt. Durch diese Abkürzung verwandelt sich die Entwickelung (96.) in

$$(98.)\quad T_{01} = \frac{\sqrt{\psi}\cdot\sqrt{\psi_1}}{2a}\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\cdot\overline{\vartheta-\vartheta_1}}\cdot P_{01}^{(n)}.$$

Wir wollen diese Entwickelung*) kurzweg mit

$$(98.a.)\qquad T = \Sigma E$$

bezeichnen, indem wir unter E das allgemeine Glied der Reihe mit der Ordnungszahl n verstehen. Denken wir uns hier den Punct 1 als fest, so wird sowohl T selber als auch jedes der E eine Function sein, die allein von den drei Variabeln ϑ, ω, φ abhängt, und die als solche respective mit $T(\vartheta, \omega, \varphi)$ oder $E(\vartheta, \omega, \varphi)$ bezeichnet werden mögen. Der

*) Auf pag. 2 dieser Abhandlung ist (man vergl. die Verbesserungen) ein Versehen vorgefallen. Der daselbst in (2. b.) aufgestellte Satz ist nämlich unrichtig. An Stelle von (2. b.) muss es folgendermassen lauten:

(99.) *Der Werth der Function $\overset{(n)}{P}(x)$ bleibt, so lange das (reell vorausgesetzte) Argument x zwischen -1 und $+1$ liegt, ebenfalls stets zwischen den Grenzen -1 und $+1$.*

Da zufolge dieses Satzes der Werth des Ausdruckes $P_{01}^{(n)}$ (97.) immer zwischen -1 und $+1$ bleibt, so wird die Entwickelung (98.) stets *convergent* sein, sobald solches bei der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\cdot\overline{\vartheta-\vartheta_1}}$$

der Fall ist. Sie wird daher convergent sein, wenn $\vartheta < \vartheta_1$ oder $\vartheta > \vartheta_1$ ist, und *nur dann* divergent werden können, wenn $\vartheta = \vartheta_1$ ist. — Bemerkt mag noch werden, dass diese Entwickelung der reciproken Entfernung (mit Hülfe der Formeln 87. b.) folgende Gestalt erhält:

$$T_{01} = \frac{2a}{\varrho_0\cdot\varrho_1'}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{\varrho_0'\cdot\varrho_1}{\varrho_0\cdot\varrho_1'}\right)^n\cdot \overset{(n)}{P}[\cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi-\varphi_1)],$$

wo ϱ_0, ϱ_0' die beiden Polabstände des Punctes $(\vartheta, \omega, \varphi)$, ϱ_1, ϱ_1' die des Punctes $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ vorstellen. Dabei ist, was die Lage dieser beiden Puncte anbelangt, vorausgesetzt, dass $\vartheta < \vartheta_1$ ist.

Werth von E ist, wenn man den constanten, nämlich allein von $\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1$ abhängenden Factor

$$\frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} e^{\mp \frac{2n+1}{2} \vartheta_1}$$

mit C bezeichnet, dann folgender:

$$(100.) \qquad E = E(\vartheta, \omega, \varphi) = C e^{\pm \frac{2n+1}{2} \vartheta} . \sqrt{\psi} . P_{01}^{(n)} .$$

B. Untersuchung der Functionen E, nach welchen die Entwickelung der reciproken Entfernung fortschreitet.

Ich werde nun zunächst zeigen, dass diese von dem variablen Puncte (ϑ ω φ) oder (x y z) abhängige Function der Differential-Gleichung $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + .. = 0$ d. i. der Gleichung $\Delta E = 0$ Genüge leistet. Bezeichnet W irgend welche Function von x, y, z, so ist nach (87. d.):

(101.)

$$\frac{4a^2 \sin\omega}{\psi^3} \Delta W = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sin\omega}{\psi} \frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\sin\omega}{\psi} \frac{\partial W}{\partial\omega}\right) + \frac{1}{\psi \sin\omega} \frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2},$$

wo $\psi = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega$ ist.

Um diesen Werth von ΔW in eine mehr bequeme Form zu bringen, setzen wir

$$(*) \qquad W = \sqrt{\psi} . \overline{W} .$$

Dann wird durch Differentiation nach ϑ, ω und φ:

$$\frac{\partial W}{\partial\vartheta} = \frac{1}{2} \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{\sqrt{\psi}} \overline{W} + \sqrt{\psi} \frac{\partial \overline{W}}{\partial\vartheta}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\omega} = \frac{\sin\omega}{\sqrt{\psi}} \overline{W} + \sqrt{\psi} \frac{\partial \overline{W}}{\partial\omega}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\varphi} = \sqrt{\psi} \frac{\partial \overline{W}}{\partial\varphi}$$

und daraus durch nochmalige Differentiation:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sin\omega}{\psi}\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right)=\\&=\frac{(e^{\vartheta}+e^{-\vartheta})\sin\omega}{2\psi\sqrt{\psi}}\overline{W}-\frac{3(e^{\vartheta}-e^{-\vartheta})^2\sin\omega}{4\psi^2\sqrt{\psi}}\overline{W}+\frac{\sin\omega}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\vartheta^2}.\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\sin\omega}{\psi}\frac{\partial W}{\partial\omega}\right)=\\&=\frac{2\sin\omega\cos\omega}{\psi\sqrt{\psi}}\overline{W}-\frac{3\sin^2\omega}{\psi^2\sqrt{\psi}}\overline{W}+\frac{\sin\omega}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\omega^2}+\frac{\cos\omega}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial\overline{W}}{\partial\omega}\end{aligned}\right.$$

$$\frac{1}{\psi\sin\omega}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{\sin\omega.\sqrt{\psi}}\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\varphi^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in (101.), so wird:

$$(**)\qquad \frac{4a^2\sin\omega}{\psi^3}.\Delta W=$$

$$=\frac{\sin\omega}{\sqrt{\psi}}\left(F.\overline{W}+\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\omega^2}+\frac{\cos\omega}{\sin\omega}\frac{\partial\overline{W}}{\partial\omega}+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\varphi^2}\right),$$

wo $$F=\frac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}+4\cos\omega}{2\psi}-3\frac{(e^{\vartheta}-e^{-\vartheta})^2+4\sin^2\omega}{4\psi^2}.$$

Da nun $\psi=e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega$ ist, so kann man in dem Zähler des ersten Bruches $e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}=\psi+2\cos\omega$ setzen, und erhält dann

$$F=\tfrac{1}{2}+3\left(\frac{\cos\omega}{\psi}-\frac{(e^{\vartheta}-e^{-\vartheta})^2+4\sin^2\omega}{4\psi^2}\right)$$

oder:

$$F=\tfrac{1}{2}+3\frac{4\cos\omega\,(e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega)-(e^{\vartheta}-e^{-\vartheta})^2-4\sin^2\omega}{4\psi^2}$$

oder:

$$F=\tfrac{1}{2}+3\frac{4\cos\omega\,(e^{\vartheta}+e^{-\vartheta})-4\cos^2\omega-(e^{\vartheta}+e^{-\vartheta})^2}{4\psi^2}.$$

Der Zähler des mit 3 multiplicirten Bruches ist aber, wie man sofort erkennt, das Quadrat des Ausdruckes $e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega=\psi$, dasselbe multiplicirt mit -1. Folglich wird

$$F=\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}=-\tfrac{1}{4},$$

so dass die Transformation (**), wenn man durch $\frac{\sin\omega}{\sqrt{\psi}}$ hebt, und zugleich für $\overline{W}$ seinen Werth $\frac{W}{\sqrt{\psi}}$ wieder einsetzt, schliesslich folgende Gestalt gewinnt:

(102.)

$$\frac{4a^2}{\psi^2\sqrt{\psi}}.\Delta W = \frac{\partial^2 \frac{W}{\sqrt{\psi}}}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 \frac{W}{\sqrt{\psi}}}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\omega}\frac{\partial \frac{W}{\sqrt{\psi}}}{\partial\omega} + \frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial^2 \frac{W}{\sqrt{\psi}}}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{4}\frac{W}{\sqrt{\psi}}.$$

Wendet man nun diese Formel an, um das Δ der Function E (100.)

$$E = E(\vartheta, \omega, \varphi) = Ce^{\pm\frac{2n+1}{2}\vartheta}.\sqrt{\psi}.P_{01}^{(n)}$$

zu transformiren, und beachtet man, dass $P_{01}^{(n)}$ (97.) von ϑ unabhängig ist, nämlich nur die beiden Variablen ω und φ enthält, dass also $\frac{E}{\sqrt{\psi}}$ durch das Product der Exponential-Grösse $e^{\pm\frac{2n+1}{2}\vartheta}$ in eine nur ω und φ enthaltende Function dargestellt ist, so ergiebt sich für ΔE ein Ausdruck von folgender Gestalt:

$$(103.) \qquad \frac{4a^2}{\psi^2\sqrt{\psi}}.\Delta E = e^{\pm\frac{2n+1}{2}\vartheta}.\overset{(n)}{F}(\omega, \varphi),$$

wo $\overset{(n)}{F}(\omega, \varphi)$ eine mit der Ordnungszahl n behaftete, und von der Variabeln ϑ unabhängige Function vorstellt. Denkt man sich die Transformationsformel (103.) successive für sämmtliche Glieder E der Entwickelung von T hingestellt, und alsdann alle diese Formeln addirt, so wird sich, mit Rücksicht auf die aus (98. a.) folgende Gleichung

$$\Delta T = \Sigma \Delta E,$$

sofort ergeben:

$$\frac{4a^2}{\psi^2\sqrt{\psi}}.\Delta T = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\pm\frac{2n+1}{2}\vartheta}.\overset{(n)}{F}(\omega, \varphi).$$

Da nun bekanntlich $\Delta T = 0$ ist, so muss dieser Formel zufolge auch die auf der rechten Seite, nach den Potenzen von e^ϑ fortschreitende Reihe $= 0$ sein. Das ist aber nur dadurch möglich, dass der Factor $\overset{(n)}{F}(\omega, \varphi)$ in jedem einzelnen Gliede verschwindet; und hieraus folgt (nach 103.), sofort, dass

$$\Delta E = 0$$

ist. Wir sehen also, dass die Function

$$E(\vartheta, \omega, \varphi) = Ce^{\pm\frac{2n+1}{2}\vartheta}.\sqrt{\psi}.P_{01}^{(n)}$$

der *ersten* unter den drei Bedingungen, welche wir in (10.) unter dem Namen „Haupt-Bedingungen" zusammengefasst haben, Genüge leistet.

und zwar derselben Genüge leistet, welchen Ort der variable Punct (ϑ, ω, φ) im ganzen unendlichen Raume auch immer einnehmen mag. Untersuchen wir nun, in wie weit von jenen Bedingungen die *beiden andern*, nämlich (10. b.) und (10. c.) von der Function E erfüllt werden! Wir unterscheiden zu diesem Zweck zwei Gattungen der Functionen E, einerseits diejenigen, bei welchen der Exponent von e gleich $+\frac{2n+1}{2}\vartheta$ andererseits diejenigen, bei welchen derselbe gleich $-\frac{2n+1}{2}\vartheta$ ist, und bezeichnen die erstern mit $\overset{+}{E}$, die letztern mit $\overset{-}{E}$, beide zusammengenommen mit $\overset{\varepsilon}{E}$, wo $\varepsilon = \pm 1$ sein soll. Dieser Bezeichnung zufolge wird:

$$(104.)\qquad \overset{+}{E}(\vartheta, \omega, \varphi) = C.e^{\frac{2n+1}{2}\vartheta}.\sqrt{\psi}.P_{01}^{(n)}$$

oder, wenn man für e^{ϑ} und ψ die Werthe aus (87. b.) substituirt:

$$(104. a.)\qquad \overset{+}{E}(\vartheta, \omega, \varphi) = C.2a.\frac{\varrho'^n}{\varrho^{n+1}}.P_{01}^{(n)}.$$

Beachtet man nun, dass in dieser Formel ϱ, ϱ' die Abstände des Punctes (ϑ, ω, φ) oder (x, y, z) von den beiden Polen A, A' vorstellen, ferner, dass

$$(104. b.)\qquad P_{01}^{(n)} = P^{(n)}[\cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1)]$$

die in (2.) angegebene *ganze* Function repräsentirt; so erkennt man leicht, dass die Function $\overset{+}{E}(\vartheta, \omega, \varphi)$, mit alleiniger Ausnahme des Poles A, allenthalben stetig ist, und dass Gleiches auch in Bezug auf die Ableitungen $\frac{\partial \overset{+}{E}}{\partial x}$, $\frac{\partial \overset{+}{E}}{\partial y}$, $\frac{\partial \overset{+}{E}}{\partial z}$ gilt. Es wird demnach die zweite der Haupt-Bedingungen (nämlich 10. b.) von der Function $\overset{+}{E}$ mit alleiniger Ausnahme des eben genannten Poles, d. i. des Poles ($\vartheta = +\infty$), allenthalben im Raume erfüllt. Und ebenso wird sich ergeben, dass diese Bedingung von der Function $\overset{-}{E}$, mit alleiniger Ausnahme des Poles ($\vartheta = -\infty$) allenthalben im Raume erfüllt wird. Um endlich zu entscheiden, ob die Functionen $E(\vartheta, \omega, \varphi)$ der *dritten* Hauptbedingung (10. c.) Genüge leisten, müssen wir ihre Werthe für den Fall untersuchen, dass sich der variable Punct (ϑ, ω, φ) nach irgend welcher Seite hin ins Unendliche

entfernt. Offenbar wird (nach 20.) für eine unendlich ferne Lage dieses Punctes $\vartheta = 0$ und $\omega = 0$; ferner $\varrho = \varrho'$; falls ϱ, ϱ' seine beiden Polabstände vorstellen. Der Werth der Function $\overset{+}{E}(\vartheta, \omega, \varphi)$ verwandelt sich daher (zufolge 104. a. und b.) für diesen Fall in

$$C \cdot \frac{2a}{\varrho} \overset{(n)}{P}(\cos \omega_1)$$

nimmt also für diesen Fall die Form

$$\frac{k}{\varrho}$$

an, wo k eine constante (nämlich von ϑ, ω, φ unabhängige) Grösse ist und ϱ den unendlich grossen Polabstand vorstellt, welchen der Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ alsdann besitzt. Damit aber ist nachgewiesen, dass die Function $\overset{+}{E}(\vartheta, \omega, \varphi)$ der dritten Haupt-Bedingung in der That Genüge leistet. Dass Gleiches auch bei der Function $\overset{=}{E}(\vartheta, \omega, \varphi)$ der Fall ist, wird sich offenbar in ganz analoger Weise darthun lassen.

Ersetzt man die Bezeichnung ω_1, φ_1 der in E enthaltenen willkürlichen Constanten durch die Bezeichnung ω_x, φ_x, so ergiebt sich also folgender Satz:

(**105.**) *Die aus der Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Puncte entspringende, mit den willkürlichen Constanten C, ω_x, φ_x und der willkürlichen ganzen Zahl n behaftete Function $\overset{\varepsilon}{E}$*

$$\overset{\varepsilon}{E}(\vartheta, \omega, \varphi) = C \cdot e^{\varepsilon \frac{2n+1}{2} \vartheta} \cdot \sqrt{\psi} \cdot P^{(n)}_{ox}$$

$$\begin{cases} \psi = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega, & \varepsilon = \pm 1 \\ P^{(n)}_{ox} = P^{(n)}[\cos\omega \cos\omega_x + \sin\omega \sin\omega_x \cos(\varphi - \varphi_x)] \end{cases}$$

leistet, mit alleiniger Ausnahme des Poles ($\vartheta = \varepsilon\infty$), allenthalben im ganzen unendlichen Raume den Haupt-Bedingungen (10.) *Genüge.*

C. Digression über die Eigenschaften der Functionen P und über die Darstellung der Functionen E als Potentiale.

Es werde irgend eine Kugelfläche construirt, die zum System der ϑ-Flächen gehört, und den Pol ($\vartheta = -\infty$) umschliesst. Irgend ein Flächen-Element dieser Kugel werde mit ds und die auf ds nach Aussen hin errichtete Normale mit N bezeichnet (Fig. 15). Bezeichnet man die Coor-

dinaten eines in ds gelegenen Punctes mit ϑ, ω, φ, so ergiebt sich für den Zuwachs $d\vartheta$, welchen ϑ erhalten würde, falls der genannte Punct längs der Normale N um eine unendlich kleine Strecke dN fortrücken wollte, aus (87. e.) folgender Werth:

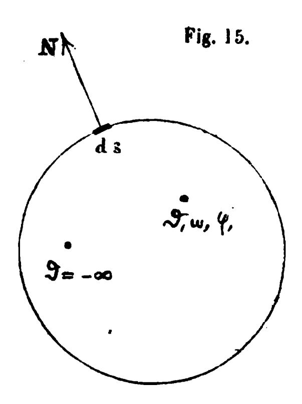


Fig. 15.

$$\frac{d\vartheta}{dN} = \pm \frac{\psi}{2a} = \pm \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}{2a}$$

Da ϑ *wächst*, sobald man von einer den Pol ($\vartheta = -\infty$) enger umschliessenden Kugelfläche zu einer denselben in weiterer Entfernung umgebenden Kugelfläche übergeht, folglich $\frac{d\vartheta}{dN}$ *positiv* ist, so muss das Vorzeichen $\pm$ in dieser Formel der Art gewählt werden, dass auch die *rechte* Seite einen *positiven* Werth besitzt. Nun ist aber $e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega$ *stets* positiv, welche Werthe ϑ und ω auch immer annehmen mögen. Folglich wird zu setzen sein:

$$(106.) \qquad \frac{d\vartheta}{dN} = + \frac{\psi}{2a} = + \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}{2a}.$$

Da der Pol ($\vartheta = -\infty$) *innerhalb*, folglich der andere Pol ($\vartheta = +\infty$) *ausserhalb* der construirten Kugel (ds) liegt, so wird die Function $\overset{+}{\underset{-}{E}}(\vartheta, \omega, \varphi)$ nach (105.) *innerhalb* der Kugelfläche allenthalben den Haupt-Bedingungen Genüge leisten. Demgemäss wird auf diese Function das Theorem (12.) anwendbar, also der Werth dieser Function in einem Puncte (ϑ_1, ω_1, φ_1), der innerhalb der Kugel liegt, durch ein gewisses über die Oberfläche der Kugel ausgedehntes Integral darstellbar sein. In der That wird jenem Theoreme zufolge

$$(107.) \qquad 4\pi \overset{+}{\underset{-}{E}}(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1) = S\left(T \frac{d\overset{+}{\underset{-}{E}}}{dN} - \overset{+}{\underset{-}{E}} \frac{dT}{dN}\right) ds$$

sein, wo das $\overset{+}{\underset{-}{E}}$ unter dem Integrale den Werth dieser Function bei dem Oberflächen-Elemente ds, ferner T den reciproken Werth des Abstandes zwischen diesem Elemente und dem Puncte (ϑ_1, ω_1, φ_1) vorstellt, und wo die Integration über die ganze Kugelfläche ausgedehnt ist. Diese Formel wollen wir nun durch Einsetzung der Werthe, welche die Functionen T und $\overset{+}{\underset{-}{E}}$ besitzen, weiter entwickeln. Bezeichnen wir die Coordinaten von ds einstweilen mit ϑ, ω, φ, und beachten wir, dass der Parameter ϑ *wächst*, falls man von Kugelflächen, die den Pol ($\vartheta = -\infty$) enger umgeben, zu Kugel-

flächen, die denselben aus weiterer Entfernung umschliessen, übergeht, dass mithin $\vartheta_1 < \vartheta$ ist; so ergiebt sich aus (98.) für T folgender Werth:

$$(108.)\qquad T = \frac{\sqrt{\psi}.\sqrt{\psi_1}}{2a} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta)} . P_{01}^{(n)};$$

ferner für eine Function $\overset{+}{\overline{E}}$ mit der Ordnungszahl p aus (105.) folgender:

$$(109.)\qquad \overset{+}{\overline{E}} = \overset{+}{\overline{E}}(\vartheta, \omega, \varphi) = e^{\frac{2p+1}{2}\vartheta} . \sqrt{\psi} . P_{0x}^{(p)},$$

wo

$$P_{0x}^{(p)} = \overset{(p)}{P}[\cos\omega \cos\omega_x + \sin\omega \sin\omega_x \cos(\varphi - \varphi_x)]$$

ist, und ω_x, φ_x ganz beliebig gewählte *feste* Werthe von ω, φ vorstellen, die als die Coordinaten eines irgendwo innerhalb oder ausserhalb der Kugel befindlichen *festen* Punctes $(\vartheta_x, \omega_x, \varphi_x)$ angesehen werden können. Endlich wird

$$(110.)\qquad \overset{+}{\overline{E}}_1 = \overset{+}{\overline{E}}(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1) = e^{\frac{2p+1}{2}\vartheta_1} . \sqrt{\psi_1} . P_{1x}^{(p)}.$$

Was nun die Bildung des Ausdruckes

$$(111.)\qquad T \frac{d\overset{+}{\overline{E}}}{dN} - \overset{+}{\overline{E}} \frac{dT}{dN}$$

anbelangt, der sich in (107.) unter dem Integrale vorfindet, und was namentlich die dabei auszuführende Differentiation nach der Normale N anbelangt, so ist zu beachten, dass bei einem Fortgange des Punctes $(\vartheta, \omega, \varphi)$ in der Richtung N *nur* ϑ sich ändert, während ω und φ dabei *ungeändert* bleiben; dass mithin z. B.

$$\frac{dT}{dN} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dN}$$

oder nach (106.):

$$\frac{dT}{dN} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} . \frac{\psi}{2a},$$

und ebenso:

$$\frac{d\overset{+}{\overline{E}}}{dN} = \frac{\partial \overset{+}{\overline{E}}}{\partial \vartheta} . \frac{\psi}{2a}$$

sein wird. Ferner ist dabei zu beachten, dass ϑ in T und $\overset{+}{\overline{E}}$ (108. u. 109.) nur insofern enthalten ist, als es darin entweder direct vorkommt, oder in ψ steckt, dass dasselbe nämlich in $P_{01}^{(n)}$, $P_{0x}^{(n)}$ *nicht* vorkommt. Es verwandelt sich daher der Ausdruck (111.) durch Substitution der Werthe von T und $\overset{+}{\overline{E}}$ in:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} e^{\frac{2n+1}{2}\vartheta_1} . P_{01}^{(n)} P_{0x}^{(p)} . \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\psi}\, e^{-\frac{2n+1}{2}\vartheta} . \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sqrt{\psi}\, e^{\frac{2p+1}{2}\vartheta}\right) \\ -\sqrt{\psi}\, e^{\frac{2p+1}{2}\vartheta} . \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sqrt{\psi}\, e^{-\frac{2n+1}{2}\vartheta}\right) \end{array} \right\} . \frac{\psi}{2a}$$

d. i. in

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sqrt{\psi_1} . \psi^2}{4a^2} P_{01}^{(n)} P_{0x}^{(p)} . e^{\frac{2n+1}{2}\vartheta_1} . e^{\left(\frac{2p+1}{2} - \frac{2n+1}{2}\right)\vartheta} . \left(\frac{2p+1}{2} + \frac{2n+1}{2}\right).$$

Hierdurch und durch (110.) gewinnt unsere Formel (107.), falls man den constanten Factor $\sqrt{\psi_1}$ auf beiden Seiten forthebt, folgende Gestalt:

(112.)

$$4\pi e^{\frac{2p+1}{2}\vartheta_1} P_{1x}^{(p)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{p+n+1}{4a^2} e^{\frac{2n+1}{2}\vartheta_1} . e^{(p-n)\vartheta} . \int P_{01}^{(n)} P_{0x}^{(p)} \psi^2 ds \right\}.$$

Unter $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ verstanden wir einen *beliebigen* Punct innerhalb der Kugelfläche (ds). Wir können daher die Lage dieses Punctes im Innern der Kugel *beliebig variiren*, ohne dass die vorstehende Formel (112.) zu bestehen aufhört. Bei dieser Variation werden, falls wir den Punct längs einer senkrechten Trajectorie der ϑ-Kugelflächen fortrücken lassen, alle in der Formel enthaltenen Grössen, mit *alleiniger* Ausnahme von ϑ_1, sogar ω_1 und φ_1 ungeändert bleiben. Da demnach der Werth von ϑ_1 ausser Connex steht mit allen anderen in der Formel enthaltenen Grössen, beide Seiten der Formel aber, was das Vorkommen von ϑ_1 anbelangt, lineäre Functionen der Exponential-Grössen

$$e^{\frac{1}{2}\vartheta_1},\quad e^{\frac{3}{2}\vartheta_1},\quad e^{\frac{5}{2}\vartheta_1}, \ldots\; e^{\frac{2n+1}{2}\vartheta_1} \ldots$$

sind, so müssen die Ausdrücke, in welche eine dieser Exponential-Grössen auf beiden Seiten multiplicirt ist, einander gleich sein. Demnach muss der auf der rechten Seite in $e^{\frac{2p+1}{2}\vartheta_1}$ multiplicirte Ausdruck gleich $4\pi P_{1x}^{(p)}$, und jeder daselbst in eine andere dieser Exponential-Grössen multiplicirte Ausdruck gleich 0 sein. Dadurch ergiebt sich:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a^2 \frac{4\pi}{2p+1} P_{1x}^{(p)} = \int P_{0x}^{(p)} P_{01}^{(p)} \psi^2 ds \\ \qquad\qquad 0 = \int P_{0x}^{(p)} P_{01}^{(n)} \psi^2 ds, \qquad (p \lesseqgtr n) \end{array} \right.$$

oder, wenn man, um den Ausdruck dieser Formeln deutlicher zu machen, den bei dem Flächen-Element ds liegenden Punct 0 mit s bezeichnet, und demgemäss auch das auf diesen Punct sich beziehende ψ durch ψ_s ersetzt.

(113.)

$$\text{a)}\quad \mathsf{S}\, P^{(p)}_{sx}\, P^{(p)}_{s1}\, \psi_s^2 ds = 4a^2 \frac{4\pi}{2p+1} P^{(p)}_{1x}$$

$$\text{b)}\quad \mathsf{S}\, P^{(p)}_{sx}\, P^{(n)}_{s1}\, \psi_s^2 ds = 0, \qquad (p \lesseqgtr n)$$

wo $\psi_s = e^{\vartheta_s} + e^{-\vartheta_s} - 2\cos\omega_s$

und $P^{(n)}_{\alpha\beta} = P^{(n)}[\cos\omega_\alpha \cos\omega_\beta + \sin\omega_\alpha \sin\omega_\beta \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)]$ ist.

Diese Formeln enthalten diejenigen Eigenschaften der Functionen $P^{(n)}_{\alpha\beta}$, um deren Ableitung es mir hier zu thun war. Im Ganzen sind in denselben drei Puncte enthalten, die beiden *festen* Puncte 1 und x, und der auf der Kugelfläche *bewegliche* Punct s. Da von den Puncten 1 und x *nur* die ω- und φ-Coordinaten in diesen Formeln vorkommen, die ϑ-Coordinaten derselben nämlich in ihnen *nicht* enthalten sind, so kann man, ohne dass dadurch irgend welche Aenderung hervorgebracht wird, jeden derselben längs der durch ihn hindurchgehenden senkrechten Trajectorie der ϑ-Kugelflächen beliebig verschieben, z. B. jeden derselben längs seiner Trajectorie so weit verschieben, bis er auf die Oberfläche der hier betrachteten Kugel (ds) zu liegen kommt. Beachten wir dieses, so sind wir durch die Formeln (113.) zu folgendem Resultat gelangt:

(**114.**) *Bezeichnet man mit* 1, x, s *drei Puncte auf einer beliebig gegebenen* ϑ*-Kugelfläche, von welchen die beiden ersten fest, der dritte auf der Fläche beweglich sein soll, und bildet man nun zwei Functionen* $P^{(n)}$ *und* $P^{(p)}$ *die eine in Bezug auf* 1 *und* s, *die andere in Bezug auf* x *und* s, *so liefert die Integration des Productes beider über alle Elemente* ds *der Kugelfläche*

$$\mathsf{S}\, P^{(n)}_{s1}\, P^{(p)}_{sx}\, \psi_s^2\, ds$$

einen Werth, welcher, wenn beide P *zu derselben Classe gehören (nämlich* $n = p$ *ist), gleich der Function* $P^{(p)}_{1x}$ *ist, dieselbe noch multiplicirt mit einem gewissen constanten Factor, und welcher andererseits, sobald beide* P *verschiedenen Classen angehören, gleich* 0 *ist.*

Das unter dem Integralzeichen ausser den beiden P und dem Flächen-Element ds noch vorhandene ψ_s hängt allein von der Lage des Elementes ds auf der Kugelfläche ab, und ist, wie beiläufig bemerkt werden mag und wie sich aus (106.) leicht ergiebt, umgekehrt proportional mit dem Abstande, welchen die gegebene Kugelfläche mit dem Parameter ϑ und eine benach-

barte Kugelfläche mit dem Parameter $\vartheta + d\vartheta$ bei dem Elemente ds von einander haben.

Ich werde nun diese Eigenschaften der $P^{(n)}$ zur Untersuchung der Functionen $\overset{+}{\overline{E}}$ und $\overset{-}{\overline{E}}$ (105.) in Anwendung bringen, und zeigen, dass sich der Werth irgend einer dieser Functionen

$$(\mathbf{115.})\qquad \overset{\varepsilon}{\overline{E}}(\vartheta, \omega, \varphi) = e^{\varepsilon\frac{2p+1}{2}\vartheta}.\sqrt{\psi}.P^{(p)}_{o\varkappa} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

in einem gegebenen Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ immer darstellen lässt als das Potential einer auf diesen Punct ausgeübten Wirkung. Zu diesem Zwecke wählen wir aus dem System der ϑ-Kugelflächen irgend eine Fläche heraus, welche so liegt, dass der Pol $(\vartheta = \varepsilon\infty)$ innerhalb, der gegebene Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ hingegen ausserhalb derselben sich befindet. Bezeichnen wir den Parameter dieser Fläche mit ϑ_s, so wird demgemäss

entweder $\qquad \varepsilon\infty > \vartheta_s > \vartheta$

oder $\qquad \varepsilon\infty < \vartheta_s < \vartheta$

sein, jenachdem $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist. In beiden Fällen wird daher

$$(\mathbf{116.})\qquad \varepsilon(\vartheta - \vartheta_s) = \text{neg.}$$

Diese Kugelfläche werde nun mit Masse belegt gedacht, und zwar der Art, dass das in irgend einem Element ds derselben angehäufte Quantum von Masse gleich

$$(\mathbf{117.})\qquad C\psi_s\sqrt{\psi_s}\,P^{(p)}_{s\varkappa}\,ds$$

ist, wo C irgend welche Constante vorstellen soll, und $P^{(p)}_{s\varkappa}$ ausser den Coordinaten ω_s, φ_s des Elementes ds noch die Coordinaten $\omega_\varkappa$, $\varphi_\varkappa$ desjenigen festen Punctes enthalten soll, welcher in der hier zu untersuchenden Function E (115.) vorkommt. Bezeichnet T_{s0} die reciproke Entfernung zwischen dem Elemente ds und dem gegebenen Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$, so wird das *Potential* der eben angegebenen Belegung der Kugelfläche auf diesen Punct den Werth

$$C\mathop{\mathrm{S}}\psi_s\sqrt{\psi_s}\,P^{(p)}_{s\varkappa}T_{s0}\,ds$$

besitzen, die Integration ausgedehnt über die ganze Oberfläche der Kugel. Nun ergiebt sich (mit Rücksicht auf 116.) für T_{s0} aus (98.) folgender Werth:

$$T_{os} = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_s}}{2a}\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}\varepsilon(\vartheta-\vartheta_s)}.\,P^{(n)}_{os}.$$

Substituirt man diesen Werth in das Potential, so fallen bei Ausführung der Integration S (zufolge 113. b.) alle Glieder in der Entwickelung von T_{os}

fort, mit Ausnahme desjenigen, für welches $n = p$ ist; so dass jenes Potential gleich

$$\frac{C\sqrt{\psi}}{2a}\, e^{\frac{2p+1}{2}\,\varepsilon(\vartheta-\vartheta_s)} \cdot \mathsf{S}\, P_{so}^{(p)}\, P_{sx}^{(p)}\, \psi_s^2\, ds$$

d. i. nach (113. a.) gleich:

$$\frac{C\sqrt{\psi}}{2a}\, e^{\frac{2p+1}{2}\,\varepsilon(\vartheta-\vartheta_s)} \cdot \frac{4a^2.4\pi}{2p+1}\, P_{ox}^{(p)}$$

wird. Lässt man endlich den constanten Factor C, welcher in der Dichtigkeit (117.) der Belegung der Kugelfläche (ds) auftritt, dem Parameter ϑ_s dieser Fläche der Art entsprechen, dass

$$\frac{C}{2a}\, \frac{4a^2.4\pi}{2p+1}\, e^{-\frac{2p+1}{2}\,\varepsilon\vartheta_s}$$

gerade $= 1$ wird, so ergiebt sich schliesslich für unser Potential der Werth:

$$\sqrt{\psi}\, e^{\varepsilon\frac{2p+1}{2}\vartheta} \cdot P_{ox}^{(p)}.$$

Dieser ist aber identisch mit der zu untersuchenden Function (115.) Also:

(**118.**) *Die Function* $\overset{\varepsilon}{E}(\vartheta, \omega, \varphi)$ (105.) *stellt das Potential derjenigen Wirkung vor, welche eine beliebig gewählte, den Pol* ($\vartheta = \varepsilon\infty$) *umschliessende und in geeigneter Weise mit Masse belegte* ϑ*-Kugelfläche auf den variablen Punct* ($\vartheta, \omega, \varphi$) *ausübt, vorausgesetzt, dass dieser Punct ausserhalb der Kugelfläche liegt.*

Da man demzufolge die einwirkende Kugelfläche auch so wählen kann, dass sie den Pol ($\vartheta = \varepsilon\infty$) unendlich enge umschliesst, so kann die in Rede stehende Function auch als das Potential derjenigen Wirkung angesehen werden, welche eine im Pole ($\vartheta = \varepsilon\infty$) befindliche unendlich kleine Kugel auf den Punct ($\vartheta, \omega, \varphi$) ausübt. Das ist ein Ergebniss, welches mit dem in (105.) gefundenem Satze in vollem Einklang steht.

D. Bestimmung der Temperatur des Körpers.

Wenn man von dem einen Pol ($\vartheta = -\infty$) auf gerader Linie zum andern Pol ($\vartheta = +\infty$) fortgeht, so wird man auf diesem Wege sämmtlichen ϑ-Flächen des ganzen Systemes und jeder derselben nur einmal begegnen. Wir wählen aus diesen unendlich vielen Flächen drei beliebige heraus, und bezeichnen die Parameter derselben in derjenigen Reihenfolge, in welcher wir denselben auf dem eben genanntem Wege begegnen, mit

τ, ϑ_1 und t. Da ϑ während jenes Weges fortwährend im Wachsen begriffen ist, so wird also

$$(119.) \qquad -\infty < \tau < \vartheta_1 < t < +\infty$$

sein. Die Flächen τ und t seien *die beiden Begrenzungsflächen* des zu untersuchenden homogenen Körpers, und also die Fläche ϑ_1 eine *beliebige Fläche im Innern* desselben. Wir haben es dann, jenachdem die beiden Flächen τ und t denselben Pol oder verschiedene Pole umschliessen — und dieses bleibt dahingestellt — entweder mit einem Körper von schalenförmiger Gestalt zu thun, oder mit einem Körper zu thun, welcher im Innern zwei kugelförmige Höhlungen besitzt und nach Aussen hin überall ins Unendliche ausgedehnt ist.

Die Oberflächen-Elemente der beiden Begrenzungen τ und t mögen mit $d\sigma$ und ds, die auf diesen Elementen errichteten, aus dem Körper in den angrenzenden Raum hineinlaufenden Normalen mit $\mathfrak{N}$ und N bezeichnet werden. Der Parameter ϑ des Flächensystems wird dann in der Richtung $\mathfrak{N}$ *abnehmen*, in der Richtung N hingegen *wachsen*. Wenn sich demnach ein ursprünglich auf dem Elemente $\begin{Bmatrix} d\sigma \\ ds \end{Bmatrix}$ befindlicher Punct längs der Normale $\begin{Bmatrix} \mathfrak{N} \\ N \end{Bmatrix}$ um eine unendlich kleine Strecke $\begin{Bmatrix} d\mathfrak{N} \\ dN \end{Bmatrix}$ fortbewegt, so wird der Parameter $\begin{Bmatrix} \tau \\ t \end{Bmatrix}$ während dieser Bewegung einen Zuwachs $\begin{Bmatrix} d\tau \\ dt \end{Bmatrix}$ von $\begin{Bmatrix} \text{negativem} \\ \text{positivem} \end{Bmatrix}$ Werthe erhalten. Und es ergiebt sich daher für diesen Zuwachs, wenn man die Formel (87. e.) in Anwendung bringt, und beachtet, dass das dortige $\psi = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega$ seiner Zusammensetzung zufolge unter allen Umständen *positiv* bleibt, folgender Werth:

$$(120.) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\tau}{d\mathfrak{N}} &= -\frac{\psi_\sigma}{2a} \\ \frac{dt}{dN} &= +\frac{\psi_s}{2a} \end{aligned} \right.$$

wo $\begin{Bmatrix} \psi_\sigma \\ \psi_s \end{Bmatrix}$ den Werth von ψ in $\begin{Bmatrix} d\sigma \\ ds \end{Bmatrix}$ vorstellt.

Auf der im Körper liegenden Fläche ϑ_1 wollen wir einen beliebigen Punct wählen, seine beiden andern Coordinaten mit ω_1 und φ_1 bezeich-

nen, und zuvörderst die dem Körper angehörende Green'sche Function (91.) $G^{(1)}$ in Bezug auf diesen Punct $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ als Centralpunct zu bilden suchen.

Von den beiden Anforderungen (91.), welchen diese Function unterworfen ist, werden wir successive eine nach der andern in Betracht ziehen, nämlich zu Anfang nur die erste berücksichtigen, dadurch eine Function erhalten, die noch willkührliche Elemente in sich enthält, und sodann diese willkührlichen Elemente der Art bestimmen, dass auch der zweiten Anforderung Genüge geschieht.

Die *erste* Anforderung besteht darin, dass die Function innerhalb des Körpers überall den Haupt-Bedingungen genügen soll, und wird also z. B. erfüllt, wenn wir für dieselbe die Function

$$\overset{\varepsilon}{\overline{E}}(\vartheta, \omega, \varphi) = C . e^{\varepsilon \frac{2n+1}{2} \vartheta} . \sqrt{\psi_0} . P_{0\varkappa}^{(n)}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \pm 1, \qquad \psi_0 = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2 \cos \omega \\ P_{0\varkappa}^{(n)} = P^{(n)}[\cos \omega \cos \omega_\varkappa + \sin \omega \sin \omega_\varkappa \cos(\varphi - \varphi_\varkappa)] \end{cases}$$

nehmen, weil diese (zufolge 105.) im ganzen unendlichen Raume, mit alleiniger Ausnahme eines der beiden Pole, allenthalben die Hauptbedingungen erfüllt, die beiden Pole aber jederzeit *ausserhalb* unseres durch die Flächen $\vartheta = \tau$ und $\vartheta = t$ begrenzten Körpers liegen (94. b). Solcher Functionen können wir, da n eine beliebige ganze Zahl und C, $\omega_\varkappa$, $\varphi_\varkappa$ willkührliche Constanten vorstellen, unendlich viele angeben. Um eine der ersten Anforderung genügende, und dabei möglichst allgemeine Function zu erhalten, nehmen wir ein aus beliebig vielen $\overset{\varepsilon}{\overline{E}}$ (d. i. sowohl aus den $\overset{+}{\overline{E}}$ als aus den $\overset{-}{\overline{E}}$) lineär zusammengesetztes Aggregat, machen also für die zu suchende Green'sche Function $G^{(1)}$ einstweilen folgenden Ansatz:

$$(121.) \quad G_0^{(1)} = \sqrt{\psi_0} \sum \left(C e^{\frac{2n+1}{2} \vartheta} P_{0\varkappa}^{(n)} + D e^{-\frac{2n+1}{2} \vartheta} P_{0\lambda}^{(n)} \right)$$

wo n eine willkührliche ganze Zahl, und C, D, $\omega_\varkappa$, $\varphi_\varkappa$, ω_λ, φ_λ willkührliche Constanten sind, deren Werthe von Glied zu Glied andere sein können, und wo das $G^{(1)}$ den Index 0 erhalten hat, um anzudeuten, dass der hier hingestellte Ausdruck den Werth der Green'schen Function im Puncte 0 d. i. im Puncte $(\vartheta, \omega, \varphi)$ präsentiren soll.

Was nun die *zweite* Anforderung anbelangt, so lässt sich dieselbe, falls man unter σ einen beliebigen Punct auf der Grenzfläche $\vartheta = \tau$, unter s einen beliebigen Punct auf der Grenzfläche $\vartheta = t$, ferner unter 1 den Centralpunct $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$, und endlich unter $T_{\alpha\beta}$ den reciproken Werth des Abstandes irgend zweier Puncte α, β versteht, nach (91.) durch folgende Relationen darstellen:

$$(122.)\quad \begin{cases} G_\sigma^{(1)} = T_{1\sigma} \\ G_s^{(1)} = T_{1s}. \end{cases}$$

Zufolge (98.) und mit Rücksicht auf (119.) verwandeln sich diese beiden Bedingungen in:

$$(123.)\quad \begin{cases} G_\sigma^{(1)} = \dfrac{\sqrt{\psi_1}\cdot\sqrt{\psi_\sigma}}{2a} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}(\tau-\vartheta_1)}.P_{1\sigma}^{(n)} \\ G_s^{(1)} = \dfrac{\sqrt{\psi_1}\cdot\sqrt{\psi_s}}{2a} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-t)}.P_{1s}^{(n)}. \end{cases}$$

Um die Werthe der in dem Ausdruck (121.) enthaltenen willkührlichen Constanten diesen Bedingungen gemäss zu wählen, scheint es gerathen, dass wir sämmtliche $\omega_\varkappa$ und ω_λ gleich ω_1, und sämmtliche $\varphi_\varkappa$ und φ_λ gleich φ_1 nehmen. Ausserdem scheint es zu diesem Ende zweckmässig, dass wir die Constanten C, D durch andere Constanten A, B ersetzen, nämlich

$$C = \frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} A \qquad\qquad D = \frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} B$$

machen. Hierdurch verwandelt sich dann der Ausdruck (121.) in folgenden:

$$(124.)\quad G_0^{(1)} = \frac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_0}}{2a} \sum \left(A e^{\frac{2n+1}{2}\vartheta} + B e^{-\frac{2n+1}{2}\vartheta}\right) P_{10}^{(n)}.$$

Und in der That lassen sich nunmehr die Constanten A, B leicht der Art bestimmen, dass den Bedingungen (123.) genügt wird. Da nämlich (nach 124.) $G_0^{(1)}$, falls man den Punct 0 einmal nach σ und dann nach s hin fallen lässt, die Werthe

$$(125.)\quad \begin{cases} G_\sigma^{(1)} = \dfrac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_\sigma}}{2a} \sum \left(A e^{\frac{2n+1}{2}\tau} + B e^{-\frac{2n+1}{2}\tau}\right) P_{1\sigma}^{(n)} \\ G_s^{(1)} = \dfrac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_s}}{2a} \sum \left(A e^{\frac{2n+1}{2}t} + B e^{-\frac{2n+1}{2}t}\right) P_{1s}^{(n)} \end{cases}$$

gewinnt, so ist zu diesem Zwecke nur erforderlich, dass man A und B den Gleichungen

$$A e^{\frac{2n+1}{2}\tau} + B e^{-\frac{2n+1}{2}\tau} = e^{\frac{2n+1}{2}(\tau-\vartheta_1)}$$

$$A e^{\frac{2n+1}{2}t} + B e^{-\frac{2n+1}{2}t} = e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-t)}$$

gemäss bestimmt, und gleichzeitig die Summation in (124.) und also auch in (125.) von $n=0$ bis $n=\infty$ ausdehnt. Berechnet man also aus diesen Relationen die Werthe der Constanten A, B, und substituirt dieselben sodann in (124.), so ist die Bildung der Green'schen Function vollendet. Man gelangt dadurch zu folgendem Resultat:

$$(126.)\qquad G_0^{(1)} = \frac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_0}}{2a}\sum_{n=0}^{n=\infty}(A\eta^{\vartheta}+B\eta^{-\vartheta})\,P_{10}^{(n)}$$

wo die Constanten A, B die Werthe haben:

$$A = \eta^{-t}\,\frac{\eta^{\vartheta_1-\tau}-\eta^{\tau-\vartheta_1}}{\eta^{t-\tau}-\eta^{\tau-t}}, \qquad B = \eta^{\tau}\,\frac{\eta^{t-\vartheta_1}-\eta^{\vartheta_1-t}}{\eta^{t-\tau}-\eta^{\tau-t}},$$

und zur Abkürzung $e^{\frac{2n+1}{2}} = \eta$ gesetzt ist. *)

---

*) Dass die Reihe (126.) stets *convergent* ist, welche Lage der Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ im Innern des Körpers auch immer einnehmen mag, lässt sich mit Hülfe der Relation (119.)

$$(\dagger)\qquad \tau < \vartheta_1 < t$$

und mit Hülfe der analogen, für die ϑ-Coordinate jenes Punctes geltenden Relation

$$(\dagger\dagger)\qquad \tau < \vartheta < t$$

leicht nachweisen. Durch Substitution der für A, B angegebenen Werthe geht nämlich die in Rede stehende Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(A\eta^{\vartheta}+B\eta^{-\vartheta})\,P_{10}^{(n)}$$

über in:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\{\eta^{\vartheta+\vartheta_1-2t}+e^{2\tau-(\vartheta+\vartheta_1)}\}-\{\eta^{2(\tau-t)+(\vartheta-\vartheta_1)}+\eta^{2(\tau-t)-(\vartheta-\vartheta_1)}\}}{1-\eta^{2(\tau-t)}}\cdot P_{01}^{(n)},$$

wo gegenwärtig die Exponenten von η, wie man aus (†) und (††) leicht erkennt, sämmtlich *negativ* sind. Substituirt man daher für η seine eigent-

Um nun, nachdem die Green'sche Function gefunden ist, die Temperatur des Körpers zu bestimmen, bringen wir die in (92.) und (92. a.) gegebene Methode in Anwendung. Bezeichnet V_1 die Temperatur im Puncte $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$, so ist den dort aufgestellten Formeln zufolge:

$$(127.)\qquad 4\pi V_1 = \int H_\sigma^{(1)} V_\sigma d\sigma + \int H_s^{(1)} V_s ds,$$

wo V_σ und V_s die gegebenen Temperaturen auf den beiden Grenzflächen vorstellen, und

$$(128.)\qquad H_\sigma^{(1)} = \frac{dG_\sigma^{(1)}}{d\mathfrak{N}} - \frac{dT_{1\sigma}}{d\mathfrak{N}} \qquad H_s^{(1)} = \frac{dG_s^{(1)}}{dN} - \frac{dT_{1s}}{dN}$$

ist. Es handelt sich also nur noch um die Berechnung der beiden H.

Zufolge (126.) und (98.) und mit Rücksicht auf (119.) wird:

$$(129.)\qquad \begin{cases} G_\sigma^{(1)} = \dfrac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_\sigma}}{2a} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} (A\eta^\tau + B\eta^{-\tau}) P_{1\sigma}^{(n)}, \\ T_{1\sigma} = \dfrac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_\sigma}}{2a} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \eta^{\tau-\vartheta_1} P_{1\sigma}^{(n)}, \qquad (\eta = e^{\frac{2n+1}{2}}). \end{cases}$$

Von diesen Werthen sind diejenigen Zuwächse $dG_\sigma^{(1)}$, $dT_{1\sigma}$ zu bilden, welche eintreten würden, falls sich der Punct σ um eine unendlich kleine Strecke $d\mathfrak{N}$ in der Richtung der Normale $\mathfrak{N}$ fortbewegen wollte. Da bei einer solchen Bewegung unter den Coordinaten τ, ω_σ, φ_σ des Punctes nur τ *allein* eine Aenderung erleiden wird, und diese Aenderung $d\tau$ (nach 120.) zu jener Strecke $d\mathfrak{N}$ in der Beziehung steht:

---

liche Bedeutung $e^{\frac{2n+1}{2}}$, so nimmt die Reihe folgende Gestalt an:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^{\frac{2n+1}{2}} + \beta^{\frac{2n+1}{2}} - \gamma^{\frac{2n+1}{2}} - \delta^{\frac{2n+1}{2}}}{1 - \varepsilon^{\frac{2n+1}{2}}} P_{01}^{(n)},$$

wo α, β, γ, δ, ε lauter *ächte* Brüche sind. Beachtet man dies, und beachtet man ferner, dass der Werth des Factors

$$P_{01}^{(n)} = P^{(n)}[\cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1)]$$

zufolge (99.) immer zwischen -1 und $+1$ liegt, so ergiebt sich sofort, dass die Reihe *stets convergirt*.

$$d\tau = \frac{-\psi_\sigma}{2a} d\mathfrak{R}$$

so ergiebt sich sofort:

$$dG_\sigma^{(1)} = \frac{\partial G_\sigma^{(1)}}{\partial \tau} d\tau = -\frac{\partial G_\sigma^{(1)}}{\partial \tau} \cdot \frac{\psi_\sigma}{2a} d\mathfrak{R}$$

$$dT_{1\sigma} = \frac{\partial T_{1\sigma}}{\partial \tau} d\tau = -\frac{\partial T_{1\sigma}}{\partial \tau} \cdot \frac{\psi_\sigma}{2a} d\mathfrak{R},$$

folglich nach (128.):

$$\textbf{(130.)} \qquad H_\sigma^{(1)} = -\frac{\psi_\sigma}{2a} \frac{\partial (G_\sigma^{(1)} - T_{1\sigma})}{\partial \tau};$$

und in ähnlicher Weise ergiebt sich mit Rücksicht auf die Relation $dt = +\frac{\psi_s}{2a} dN$ (120.) für $H_s^{(1)}$ der Werth

$$\textbf{(131.)} \qquad H_s^{(1)} = +\frac{\psi_s}{2a} \frac{\partial (G_s^{(1)} - T_{1s})}{\partial t}.$$

Was nun die weitere Ausführung der Formel (130.) für $H_\sigma^{(1)}$, also die Differentiation der Functionen $G_\sigma^{(1)}$, $T_{1\sigma}$ (129.) nach τ anbelangt, so ist zu bemerken, dass in denselben das Argument τ in doppelter Weise enthalten ist, einmal, insofern sich dasselbe in den Exponential-Grössen η^τ, $\eta^{-\tau}$, $\eta^{\tau-\vartheta_1}$ vorfindet, und zweitens, insofern dasselbe in $\psi_\sigma = e^\tau + e^{-\tau} - 2\cos\omega_\sigma$ vorkommt. Bezeichnen wir die Ausdrücke (129.) für einen Augenblick mit:

$$(*) \qquad \begin{cases} G_\sigma^{(1)} = \sqrt{\psi_\sigma} \cdot f(\tau) \\ T_{1\sigma} = \sqrt{\psi_\sigma} \cdot \varphi(\tau), \end{cases}$$

so wird

$$(**) \quad \frac{\partial (G_\sigma^{(1)} - T_{1\sigma})}{\partial \tau} = \sqrt{\psi_\sigma}\,[f'(\tau) - \varphi'(\tau)] + \frac{\partial \sqrt{\psi_\sigma}}{\partial \tau}[f(\tau) - \varphi(\tau)].$$

Da nun nach der Definition der Green'schen Function G (vergl. 122.) $G_\sigma^{(1)} = T_{1\sigma}$ ist, so muss zufolge (*)

$$f(\tau) = \varphi(\tau)$$

sein. Demnach verschwindet in (**) der letzte Term, so dass man erhält

$$(*{*}*) \qquad \frac{\partial (G_\sigma^{(1)} - T_{1\sigma})}{\partial \tau} = \sqrt{\psi_\sigma}\,[f'(\tau) - \varphi'(\tau)].$$

Aus (*) und (***) ergiebt sich die Regel, dass man bei Bildung des Differential-Quotienten

$$\frac{\partial(G_\sigma^{(1)}-T_{1\sigma})}{\partial\tau}$$

das in $G_\sigma^{(1)}$ und $T_{1\sigma}$ enthaltene ψ_σ wie *eine von τ unabhängige* Grösse betrachten darf. Mit Rücksicht hierauf erhält man aus (129.) sofort:

$$\frac{\partial(G_\sigma^{(1)}-T_{1\sigma})}{\partial\tau} = \frac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_\sigma}}{2a}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+1}{2}(A\eta^\tau - B\eta^{-\tau} - \eta^{\tau-\vartheta_1})\,P_{1\sigma}^{(n)}.$$

Substituirt man hier für die Constanten A, B ihre Werthe aus (126.), so ergiebt sich:

$$\frac{\partial(G_\sigma^{(1)}-T_{1\sigma})}{\partial\tau} = -\frac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_\sigma}}{2a}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\frac{\eta^{t-\vartheta_1}-\eta^{\vartheta_1-t}}{\eta^{t-\tau}-\eta^{\tau-t}}\,P_{1\sigma}^{(n)},$$

also nach (130.)

$$H_\sigma^{(1)} = \frac{\psi_\sigma\sqrt{\psi_\sigma}\sqrt{\psi_1}}{4a^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\,\frac{\eta^{t-\vartheta_1}-\eta^{\vartheta_1-t}}{\eta^{t-\tau}-\eta^{\tau-t}}\,P_{1\sigma}^{(n)}.$$

In gleicher Weise lässt sich mit Hülfe von (131.) der Werth von $H_s^{(1)}$ entwickeln, was hier nicht weiter durchgeführt werden soll. Setzt man für η seine wahre Bedeutung $\eta = e^{\frac{2n+1}{2}}$ wieder ein, so hat man schliesslich für die beiden H folgende, einander vollständig ähnliche Formeln*):

$$(132.)\begin{cases} H_\sigma^{(1)} = \dfrac{\psi_\sigma\sqrt{\psi_\sigma}\sqrt{\psi_1}}{4a^2}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\frac{e^{\frac{2n+1}{2}(t-\vartheta_1)}-e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-t)}}{e^{\frac{2n+1}{2}(t-\tau)}-e^{\frac{2n+1}{2}(\tau-t)}}\,P_{1\sigma}^{(n)} \\[2ex] H_s^{(1)} = \dfrac{\psi_s\sqrt{\psi_s}\sqrt{\psi_1}}{4a^2}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\frac{e^{\frac{2n+1}{2}(\tau-\vartheta_1)}-e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\tau)}}{e^{\frac{2n+1}{2}(\tau-t)}-e^{\frac{2n+1}{2}(t-\tau)}}\,P_{1s}^{(n)} \end{cases}$$

---

*) Unter $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ ist hier ein Punct verstanden worden, welcher entweder im *Innern* oder auch auf der *Begrenzung* des gegebenen Körpers liegt. Dass die Reihen (132.) stets *convergent* sind, sobald dieser Punct im *Innern* des Körpers liegt, lässt sich leicht nachweisen; und zwar in derselben Art, wie solches früher bei der Reihe (126.) dargethan wurde. Ob

Substituirt man diese Werthe in (127.), so wird der Werth von V_1 durch Quadraturen bekannter Functionen dargestellt sein, das in diesem §. vorgelegte Problem damit also vollständig gelöst sein. Wir sind demnach zu folgendem Resultat gelangt:

(**133.**) **Resultat.** *Befinden sich die beiden den Körper begrenzenden Kugelflächen* ($d\sigma$) *und* (ds) *in beliebig gegebenen und unveränderlichen Temperaturen* V_σ *und* V_s, *so ist die Temperatur* V_1 *in irgend einem Puncte* 1 *des Körpers nach Eintritt des stationären Zustandes folgende*

$$4\pi V_1 = \int V_\sigma H_\sigma^{(1)} d\sigma + \int V_s H_s^{(1)} ds,$$

wo die eine Integration über alle Elemente der einen, die andere über alle Elemente der andern Begrenzungsfläche ausgedehnt ist, und wo ferner $H_\sigma^{(1)}$ *und* $H_s^{(1)}$ *die in* (132.) *vollständig berechneten, von den Coordinaten* ϑ_1, ω_1, φ_1 *des innern Punctes* 1, *sowie von den Coordinaten* τ, ω_σ, φ_σ *und* t, ω_s, φ_s *der beiden Flächen-Elemente* $d\sigma$ *und* ds *abhängigen Werthe vorstellen. Von den beiden Functionen* ψ_α *und* $P_{\alpha\beta}^{(n)}$, *die in den Ausdrücken der* H (132.) *vorkommen, hat die erstere die Bedeutung*

$$\psi_\alpha = e^{\vartheta_\alpha} + e^{-\vartheta_\alpha} - 2\cos\omega_\alpha;$$

während die letztere die Laplace'sche Function

$$P_{\alpha\beta}^{(n)} = P^{(n)}[\cos\omega_\alpha\cos\omega_\beta + \sin\omega_\alpha\sin\omega_\beta\cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)]$$

repräsentirt.

Bemerkung. Das System der ϑ-Flächen, mit dessen Hülfe hier die Aufgabe gelöst wurde, ist, wie man leicht erkennen kann, keineswegs *isotherm.* Wäre nämlich solches der Fall, so müsste eine *nur* von ϑ abhängende Function $F(\vartheta)$ vorhanden sein, welche der Gleichung $\Delta F(\vartheta) = 0$ Genüge leistet. Aus (87. d.) ergiebt sich aber:

---

die Reihen auch dann noch convergiren, wenn der Punct (ϑ_1, ω_1, φ_1) irgendwo in der *Begrenzung* des Körpers liegt, also $\vartheta_1 = \tau$ oder $= t$ wird, mag hier dahingestellt bleiben.

$$\frac{4a^2 \sin\omega}{\psi^3} \Delta F(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sin\omega \,.\, F(\vartheta)}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}\right);$$

woraus sofort erhellt, dass eine Function $F(\vartheta)$, für welche $\Delta F(\vartheta)$ verschwindet, nicht existiren kann.

Uebrigens lassen sich mit Hülfe des in (133.) gefundenen Resultates die *isothermen Flächen* für den hier betrachteten Körper leicht ermitteln. Zu diesem Zwecke wird man nämlich nur den stationären Temperaturzustand für *den* Fall zu bestimmen haben, dass die gegebene Temperatur der einen Grenzfläche ($d\sigma$) überall dieselbe, $= \Gamma$, und die der andern Fläche (ds) ebenfalls allenthalben gleich gross, $= C$ ist. Alsdann ergiebt sich für die nach Eintritt des stationären Zustandes in irgend einem Puncte 1 des Körpers vorhandene Temperatur V_1 (aus 133.) folgender Werth:

$$4\pi V_1 = \Gamma \int H_\sigma^{(1)} d\sigma + C \int H_s^{(1)} ds.$$

Substituirt man in $H_\sigma^{(1)}$ (132.) für

$$\psi_\sigma \sqrt{\psi_\sigma}$$

den Ausdruck

$$\frac{\psi_\sigma^2}{\sqrt{\psi_\sigma}} = \frac{\psi_\sigma^2}{\sqrt{e^\tau + e^{-\tau} - 2\cos\omega_\sigma}} = \psi_\sigma^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\bar{\tau}} \overset{(n)}{P}(\cos\omega_\sigma),$$

wo $\bar{\tau}$ den *absoluten* Werth von τ vorstellen soll; so lässt sich das Integral $\int H_\sigma^{(1)} d\sigma$ mit Hülfe der Sätze (113. a. b.) leicht ausführen. Man findet:

$$\int H_\sigma^{(1)} d\sigma = 4\pi \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(t-\vartheta_1)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1 - t)}}{e^{\frac{2n+1}{2}(t-\tau)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\tau - t)}} e^{-\frac{2n+1}{2}\bar{\tau}} . \overset{(n)}{P}(\cos\omega_1).$$

Ein ähnlicher Werth ergiebt sich für $\int H_s^{(1)} ds$. Also schliesslich:

$$(133.\,a.) \quad V_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \begin{aligned} &\Gamma . \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(t-\vartheta_1)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1 - t)}}{e^{\frac{2n+1}{2}(t-\tau)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\tau - t)}} e^{-\frac{2n+1}{2}\bar{\tau}} \\ + &C . \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(\tau-\vartheta_1)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1 - \tau)}}{e^{\frac{2n+1}{2}(\tau-t)} - e^{\frac{2n+1}{2}(t - \tau)}} e^{-\frac{2n+1}{2}\bar{t}} \end{aligned} \right\} \overset{(n)}{P}(\cos\omega_1),$$

wo $\bar{\tau}$ und $\bar{t}$ die *absoluten* Werthe von τ und t vorstellen. Die isothermen Flächen werden repräsentirt durch $V_1 = \text{Const.}$ Setzt man daher in der vorstehenden Formel für V_1 eine willkührliche Constante, so wird man eine

Gleichung zwischen ϑ_1 und ω_1 erhalten, durch welche die isothermen Flächen oder vielmehr deren Durchschnittscurven mit einer Meridianebene analytisch dargestellt werden.

Die früher in (49.) und (60.) gefundenen Formeln würden sich aus (133. a.) leicht deduciren lassen.

Bemerkung. Eine ω-Curve besteht (nach pag. 26—28) aus einem Kreisbogen, welcher alle ϑ-Flächen, mithin auch die beiden Grenzflächen des betrachteten Körpers *senkrecht* durchschneidet. Ausserdem ist bekannt, dass dieser Kreisbogen in dem einen Pole seinen Anfangspunct, in dem andern seinen Endpunct hat. Daraus ergiebt sich eine *einfache Methode, um, wenn der Körper gegeben ist, die beiden Pole zu construiren.* Man wird nämlich zu diesem Zweck nur einen Kreis zu construiren haben, welcher die beiden den Körper begrenzenden Kugelflächen senkrecht durchschneidet, welcher also in einer Meridian-Ebene des Körpers liegen wird. Die beiden Puncte, in welchen dieser Kreis und die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpuncte einander schneiden, werden dann die Pole sein.

Bemerkung. Die in diesem §. dargelegte Methode lässt sich übrigens auch leicht in Anwendung bringen, um den stationären Temperaturzustand eines Körpers zu bestimmen, der von einer *einzigen* Kugelfläche begrenzt wird. Der Parameter ϑ dieser Fläche mag τ heissen und dieselbe so gewählt sein, dass sie den Pol ($\vartheta = -\infty$) umschliesst. Bezeichnet man alsdann mit $G^{(1)}$ die Green'sche Function in Bezug auf irgend einen im Innern dieser Kugel gewählten Centralpunct (ϑ_1, ω_1, φ_1) oder 1, und mit $G_0^{(1)}$ den Werth dieser Function im Puncte (ϑ, ω, φ) oder 0, so findet man:

$$G_0^{(1)} = \frac{\sqrt{\psi_0}\sqrt{\psi_1}}{2a}\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta+\vartheta_1-2\tau)} P_{01}^{(n)}.$$

Hieraus ergiebt sich, falls man unter (τ, ω_σ, φ_σ) oder σ einen beliebigen Punct auf der Oberfläche der Kugel versteht, für den Ausdruck

$$H_\sigma^{(1)} = \frac{dG_\sigma^{(1)}}{dN} - \frac{dT_{\sigma 1}}{dN}$$

folgender Werth:

$$H_\sigma^{(1)} = \frac{\psi_\sigma\sqrt{\psi_\sigma}\sqrt{\psi_1}}{4a^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\,e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\tau)} P_{1\sigma}^{(n)}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes lässt sich aber dann die nach Eintritt des stationären Zustandes in 1 vorhandene Temperatur V_1 folgendermassen darstellen:

$$4\pi V_1 = \int V_\sigma H_\sigma^{(1)} d\sigma,$$

wo die Integration über alle Elemente $d\sigma$ der Kugelfläche ausgedehnt ist, und V_σ die für $d\sigma$ gegebene Temperatur vorstellt.

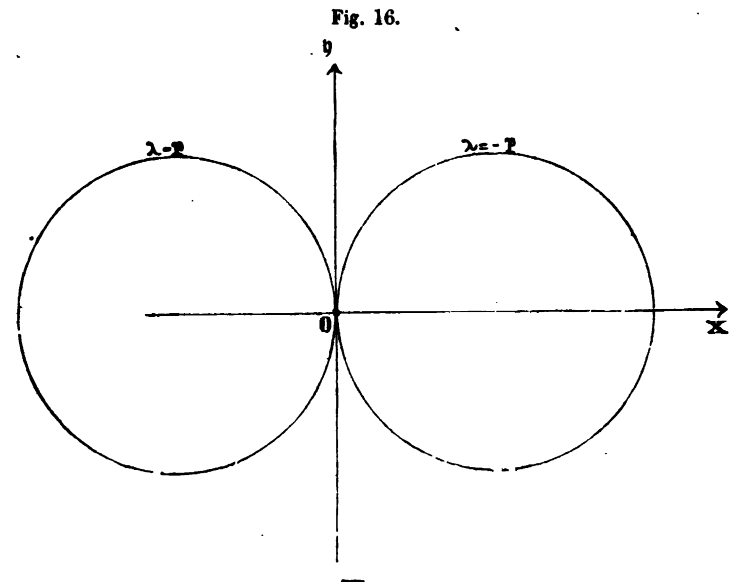
§. 4. *Lösung des Problemes des stationären Temperaturzustandes für einen homogenen Körper, welcher von irgend zwei einander berührenden Kugelflächen begrenzt wird.*

Es wird hier wiederum, wie im vorhergehenden §., ein Coordinatensystem in Anwendung gebracht werden, welches symmetrisch ist in Bezug auf die x-Achse. Eine auf einer Seite von dieser Achse begrenzte, und um dieselbe drehbare Ebene mag dann wiederum *Meridian-Ebene* genannt, und der zwischen 0° und 360° variirende Winkel, unter welchem sie gegen die $\overline{xy}$-Ebene geneigt ist, mit φ bezeichnet werden. Um aber die Lage eines Punctes in einer gegebenen Meridian-Ebene zu bestimmen, sollen gegenwärtig an Stelle von ϑ, ω *andere* Variabeln genommen werden. Stellt $\mathfrak{y}$ die Linie vor, in welcher die $\overline{yz}$-Ebene von der Meridian-Ebene geschnitten wird, und bezeichnen demgemäss x, $\mathfrak{y}$ die rechtwinkligen Coordinaten, welche irgend ein in dieser Ebene liegender Punct in Bezug auf die Achsen x, $\mathfrak{y}$ besitzt, so sollen die gegenwärtig zu dem genannten Zweck dienenden Variablen λ, s, was ihre Abhängigkeit von x, $\mathfrak{y}$ anbelangt, definirt sein durch die Formel:

$$(134.) \qquad x + i\mathfrak{y} = -\frac{1}{\lambda + is}.$$

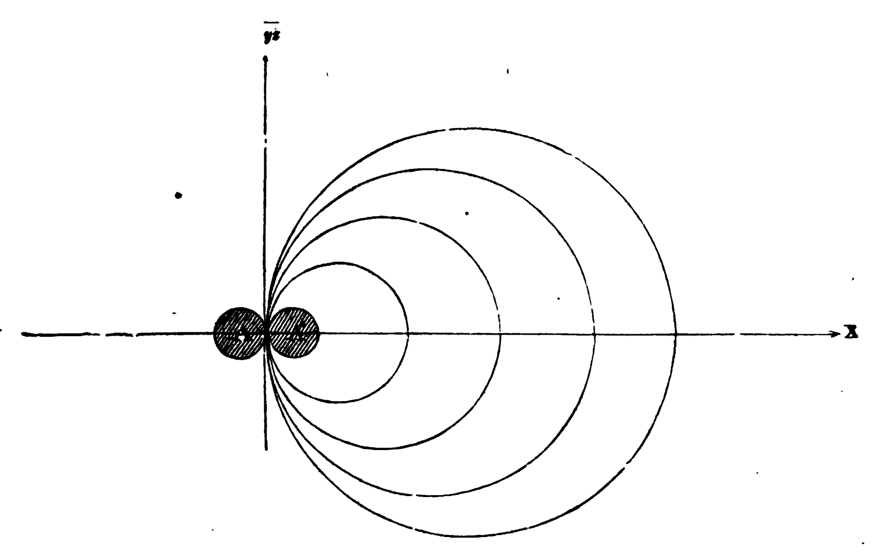
Es sind das also dieselben Variablen, welche bereits in (62. bis 66.) als Coordinaten angewendet wurden. Die Gleichungen $\lambda =$ Const. stellen dann Kreise oder, falls man *alle* Meridian-Ebenen gleichzeitig betrachtet, Kugelflächen vor, welche sämmtlich die $\overline{yz}$-Ebene im Anfangspunct O berühren. Dabei repräsentiren die Gleichungen $\lambda = +p$ und $\lambda = -p$, wenn man unter p irgend welche *positive Grösse* versteht, zwei Kugelflächen, welche beide *denselben* Radius $\frac{1}{p}$ besitzen, beide die $\overline{yz}$-Ebene in O berühren, von denen aber (Fig. 16.) die erstere links, die letztere rechts von dieser Ebene liegt (man sehe 65. und 66.). Beide Flächen

Fig. 16.



werden, indem sie bei O mit der $\overline{yz}$-Ebene fortwährend in Contact bleiben, sich mehr und mehr erweitern und sich zuletzt zur $\overline{yz}$-Ebene abplatten, sobald man den Radius $\frac{1}{p}$ bis ∞ hin zunehmen, also p bis O hin abnehmen lässt. Andererseits werden beide Flächen sich mehr und mehr zusammenziehen und zuletzt in zwei unendlich kleine Kugeln A, A' (Fig. 17.) übergehen, sobald man p bis ∞ hin anwachsen lässt. Jedes der beiden Flächensysteme, nämlich sowohl das links von der $\overline{yz}$-Ebene als das rechts von derselben liegende System, besteht demnach aus in einander geschachtelten Kugelflächen. Die innern Kerne der beiden Systeme — d. h. die beiden Puncte, um welche sich sämmtliche Flächen des einen oder andern Systemes schalenförmig herumziehen — werden durch jene beiden unendlich kleinen Kugeln A, A' repräsentirt, also durch zwei kleine Kugeln repräsentirt, welche einem unendlich grossen Werthe von p d. i. den beiden Parametern $\lambda = +\infty$ und $\lambda = -\infty$ entsprechen. Man würde berechtigt sein, diese beiden unendlich kleinen Kugeln A, A' geradezu als Puncte und zwar als Puncte anzusehen, welche beide mit dem Anfangspunct O des Coordinatensystems (x, y, z) zusammenfallen. Es ist aber zweckmässig die Vorstellung unendlich kleiner Kugeln bei-

Fig. 17.



zubehalten, also A und A' als zwei Kugelflächen mit den Parametern $\lambda = +\infty$ und $\lambda = -\infty$ zu betrachten, welche beide in O, die erstere von der linken, die letztere von der rechten Seite her, mit der $\overline{yz}$-Ebene in Contact stehen. Diese beiden unendlich kleinen Kugeln sollen fortan Pole genannt werden, weil sie in der That in dem gegenwärtigen Coordinatensystem (λ, s, φ) dieselbe Rolle spielen, welche im vorhergehenden §. den Puncten gleichen Namens in Bezug auf das dortige Coordinatensystem (ϑ, ω, φ) zugefallen war.

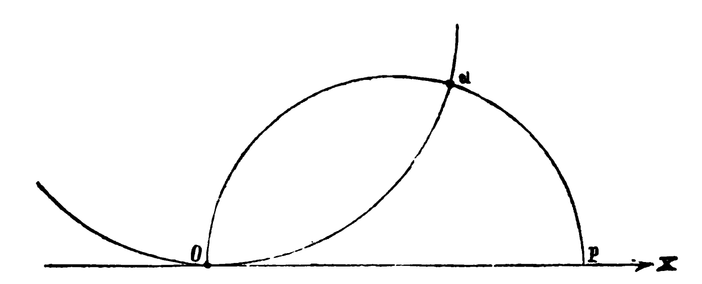
(134. a.) *Man wird alsdann die Flächen links und rechts von der $\overline{yz}$-Ebene dadurch von einander unterscheiden können, dass man die erstern als Umhüllungsflächen des Poles ($\lambda = +\infty$), die letztern als Umhüllungsflächen des Poles ($\lambda = -\infty$) bezeichnet.*

(135.) Denkt man sich nun den zu untersuchenden Körper von irgend zweien dieser Kugelflächen mit den Parametern $\lambda = \tau$ und $\lambda = t$ begrenzt, so wird man es, je nachdem τ und t dasselbe oder verschiedene Vorzeichen besitzen, entweder mit einem Körper von schalenförmiger Gestalt, dessen innere und äussere Oberfläche mit einander bei O in Contact sind, zu thun haben, oder mit einem Körper zu thun

haben, der im Innern zwei einander bei O berührende kugelförmige Höhlungen besitzt und nach Aussen hin überall unbegrenzt ist. Wie aber die Gestalt des Körpers unter so bewandten Umständen auch immer beschaffen sein mag, *stets werden die beiden unendlich kleinen Kugeln, welche wir die Pole genannt haben, ausserhalb des Körpers d. h. in einem Raume liegen, der von der Masse des Körpers leer ist.*

(**136.**) Sind die Werthe von φ und λ gegeben, so ist damit die Lage desjenigen Halbkreises festgesetzt, in welchem die dem Neigungswinkel φ entsprechende (an die x-Achse sich anlehnende) Meridian-Ebene und die dem Parameter λ zugehörige Kugelfläche einander schneiden. Um die Lage eines Punctes α auf diesem Halbkreise zu bestimmen, dient dann schliesslich die dritte Variable ϑ. Diese repräsentirt (zufolge 65. 66.) für irgend einen Punct α den reciproken Radius eines Kreises, welcher durch α hindurchgeht, und die x-Achse in O berührt (Fig. 18.). Es wird

Fig. 18.



also ϑ von 0 bis ∞ wachsen, wenn der Punct α den Halbkreis vollständig von p bis O hin durchläuft.

(**137.**) Sollen also λ, ϑ, φ die Coordinaten jedes beliebigen Punctes vorstellen können, so muss λ variabel zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, ϑ variabel zwischen 0 und $+\infty$, endlich φ variabel zwischen 0^0 und 360^0 gedacht werden.

Der Weg zur Lösung des in diesem §. vorgelegten Problemes wird nun folgenden Lauf nehmen:

A. Der reciproke Werth T der Entfernung, welche ein *beweglicher* Punct (λ, ϑ, φ) von irgend einem *festen* Puncte 1 besitzt, wird eine

Function von λ, s, φ sein. Diese Function $T = T(\lambda, s, \varphi)$ wird sich durch ein, zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommenes, bestimmtes Integral darstellen lassen, so dass man eine Formel von folgender Gestalt erhält:

$$T(\lambda, s, \varphi) = \int_{n=0}^{n=\infty} E(\lambda, s, \varphi)\, dn,$$

wo $E(\lambda, s, \varphi)$ eine Function vorstellt, welche ausser den Variabeln λ, s, φ noch das Integrationsargument n enthält und, falls J die Bessel-sche Function (4. a.) und C, s_1, φ_1 willkührliche Constanten vorstellen, folgende Form besitzt:

$$(*) \quad E(\lambda, s, \varphi) = C.e^{\pm n\lambda}.\sqrt{\lambda^2 + s^2}.J\left[n\sqrt{s^2 + s_1^2 - 2ss_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}\right].$$

B. a. Nachdem sodann gezeigt worden ist, dass dieser von dem variablen Punct (λ, s, φ) abhängige Ausdruck E, als Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z dieses Punctes betrachtet, der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet; weise ich nach — und hierzu bedarf es zuvor

B. b. einer näheren Untersuchung der Functionen J —

B. c. dass jede der Functionen $E(\lambda, s, \varphi)$ als das Potential eines der beiden Pole auf den Punct (λ, s, φ) angesehen werden kann. Genauer ausgedrückt: ich weise nach, dass eine der beiden unendlich kleinen Kugeln, welche den Namen „Pole" erhalten haben, bei geeigneter Massenbelegung, auf den Punct (λ, s, φ) eine Wirkung ausübt, deren Potential $= E(\lambda, s, \varphi)$ ist. Da nun (nach 135.) die Pole beide *ausserhalb* des hier zu untersuchenden Körpers liegen, so wird hiermit evident dargethan sein, dass alle diese Functionen $E(\lambda, s, \varphi)$ *innerhalb* des Körpers den Hauptbedingungen (10.) Genüge leisten.

C. Endlich wird aus den Functionen E die Green'sche Function zusammengesetzt, und aus dieser sodann (durch die in 92. angegebenen Operationen) die vollständige Lösung des vorgelegten Problemes erhalten werden.

A. Darstellung der reciproken Entfernung zweier Puncte durch ein bestimmtes Integral.

Die reciproke Entfernung zweier Puncte 0 und 1

$$T_{01} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$

lässt sich (zufolge 88. c.) durch die neuen Coordinaten λ, s, φ und λ_1, s_1, φ_1 so darstellen:

$$\text{(137. a.)}\quad T_{01} = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)^2+[s^2+s_1^2-2ss_1\cos(\varphi-\varphi_1)]}},$$

$$\text{(138.)}\quad \text{wo } \psi = \lambda^2+s^2 \quad\text{und}\quad \psi_1 = \lambda_1^2+s_1^2 \text{ ist.}$$

Daraus folgt durch Anwendung der in (74.) entwickelten Formel sofort:

$$T_{01} = \sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}\int_{n=0}^{n=\infty} e^{-n.\overline{\lambda-\lambda_1}}.\,J\left[n\sqrt{s^2+s_1^2-2ss_1\cos(\varphi-\varphi_1)}\right]dn$$

oder, falls man zur Abkürzung den von der Lage der beiden Puncte 0 und 1 sowie ausserdem noch von dem Integrations-Argumente n abhängenden Ausdruck

$$\text{(139.)}\qquad J\left[n\sqrt{s^2+s_1^2-2ss_1\cos(\varphi-\varphi_1)}\right] = J_{01}^{(n)}$$

setzt:

$$\text{(140.)}\quad T_{01} = \sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}\int_{n=0}^{n=\infty} e^{-n.\overline{\lambda-\lambda_1}}.\,J_{01}^{(n)}\,dn. \text{*)}$$

---

*) Dass diese Darstellung von T_{01}, mit alleiniger Ausnahme des Falles $\lambda = \lambda_1$, stets gültig ist, nämlich stets Gültigkeit hat, wenn $\lambda < \lambda_1$ oder $\lambda > \lambda_1$ ist, lässt sich leicht darthun. Das darin vorhandene Integral wird nämlich, weil der Werth des Ausdruckes $J_{01}^{(n)}$ (139.) zufolge (4. b.) stets zwischen -1 und $+1$ bleibt, offenbar zwischen den Grenzen

$$+\int_0^\infty e^{-n.\overline{\lambda-\lambda_1}}\,dn \quad\text{und}\quad -\int_0^\infty e^{-n.\overline{\lambda-\lambda_1}}\,dn$$

liegen, folglich immer, sobald nicht gerade $\lambda = \lambda_1$ ist, einen *endlichen* Werth besitzen. Dass andererseits dieser Werth auch ein ganz *bestimmter* ist, erkennt man sofort, wenn man beachtet, dass der unter dem Integral stehende Ausdruck für $n = \infty$ Null wird.

Unter $\overline{\lambda - \lambda_1}$ ist hier bald die Differenz $\lambda - \lambda_1$, bald die Differenz $\lambda_1 - \lambda$ zu verstehen, je nachdem die erstere oder die letztere positiv ist.

Bezeichnet man diese Darstellung der reciproken Entfernung kurzweg mit

$$T = \int_{n=0}^{n=\infty} E\, dn$$

und betrachtet man den Punct 1 als *fest*, also λ_1, s_1, φ_1 als *Constante*, und nur λ, s, φ als *variabel*, so ist dann unter E eine Function dieser drei Variabeln zu verstehen, welche folgende Form besitzt

$$E = E(\lambda, s, \varphi) = C.e^{\pm n\lambda}.\sqrt{\psi}.J_{01}^{(n)}.$$

wo C einen *constanten* Factor vorstellt. Sondert man diese Functionen E, je nachdem der darin enthaltene Exponent $\pm n\lambda$ das obere oder untere Vorzeichen besitzt, in zwei verschiedene Gattungen $\overset{+}{E}$ und $\overset{-}{E}$, und schreibt man ausserdem s_x, φ_x an Stelle von s_1, φ_1, so hat man:

$$(141.) \qquad E(\lambda, s, \varphi) = C e^{\varepsilon n\lambda}.\sqrt{\psi}.J_{0x}^{(n)},$$

wo

$$\begin{cases} \psi = \lambda^2 + s^2, & \varepsilon = \pm 1 \\ J_{0x}^{(n)} = J\left[n\sqrt{s^2 + s_x^2 - 2s\,s_x \cos(\varphi - \varphi_x)}\right] \end{cases}$$

ist, und wo n und C sowohl als auch s_x und φ_x *willkührliche Constanten* vorstellen, von denen die erste (nämlich n) stets positiv ist.

B. Untersuchung der Function E, welche sich, bei der Darstellung der reciproken Entfernung zweier Puncte durch ein bestimmtes Integral, unter dem Integralzeichen vorfindet.

B. a Die Function E genügt der Differential-Gleichung $\Delta E = 0$.

Bezeichnet W irgend welche von x, y, z oder ϑ, s, φ abhängende Function, so ist zufolge (88. d.):

$$(142.) \quad \frac{s}{\psi^2}\Delta W = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{s}{\psi}\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{s}{\psi}\frac{\partial W}{\partial s}\right) + \frac{1}{\psi s}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}.$$

Setzt man nun:

$$W = \sqrt{\psi}.\overline{W}$$

und beachtet, dass $\psi = \lambda^2 + s^2$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{s}{\psi}\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{s\lambda}{\psi\sqrt{\psi}}\overline{W} + \frac{s}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial \overline{W}}{\partial \lambda},$$
$$\frac{s}{\psi}\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{s^2}{\psi\sqrt{\psi}}\overline{W} + \frac{s}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial \overline{W}}{\partial s}$$
$$\frac{1}{\psi s}\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{1}{s\sqrt{\psi}}\frac{\partial \overline{W}}{\partial \varphi}$$

und hieraus:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{s}{\psi}\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right) = \frac{s}{\psi\sqrt{\psi}}\overline{W} - 3\frac{s\lambda^2}{\psi^2\sqrt{\psi}}\overline{W} + \frac{s}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \lambda^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{s}{\psi}\frac{\partial W}{\partial s}\right) = \frac{2s}{\psi\sqrt{\psi}}\overline{W} - 3\frac{s^3}{\psi^2\sqrt{\psi}}\overline{W} + \frac{s}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial s^2} + \frac{1}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial \overline{W}}{\partial s}$$
$$\frac{1}{\psi s}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{s\sqrt{\psi}}\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \varphi^2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (142.) wird:

$$\frac{1}{\psi^2\sqrt{\psi}}\Delta W = F.\overline{W} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \overline{W}}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \varphi^2},$$

wo der Ausdruck F

$$= \frac{3s}{\psi\sqrt{\psi}} - \frac{3s(\lambda^2+s^2)}{\psi^2\sqrt{\psi}}$$

d. i. (mit Rücksicht auf $\lambda^2 + s^2 = \psi$) $= 0$ ist. Demnach ergiebt sich also, falls man für $\overline{W}$ seinen eigentlichen Werth

$$\overline{W} = \frac{W}{\sqrt{\psi}}$$

restituirt:

$$\text{(143.)} \quad \frac{1}{\psi^2\sqrt{\psi}}\Delta W = \frac{\partial^2 \frac{W}{\sqrt{\psi}}}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \frac{W}{\sqrt{\psi}}}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \frac{W}{\sqrt{\psi}}}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \frac{W}{\sqrt{\psi}}}{\partial \varphi^2}.$$

Wendet man diese Formel an, um das ΔE der Function (141.)

$$E = e^{\pm n\lambda}.\sqrt{\psi}.\,J_{01}^{(n)} = e^{\pm n\lambda}.\sqrt{\psi}.J$$

zu bilden, so ergiebt sich:

$$\text{(144.)} \quad \frac{1}{\psi^2\sqrt{\psi}}\Delta E = \left(n^2 J + \frac{\partial^2 J}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial J}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 J}{\partial \varphi^2}\right).e^{\pm n\lambda},$$

wo J oder $J_{01}^{(n)}$ zufolge (141.) den Werth der Bessel'schen Function

$$J = J(\mathfrak{x})$$

für ein Argument $\mathfrak{x}$ repräsentirt, welches so lautet:

$$\mathfrak{x} = n\sqrt{s^2+s_1^2-2ss_1\cos(\varphi-\varphi_1)}$$

Demzufolge wird:

$$J = J(\mathfrak{x})$$

$$\frac{\partial J}{\partial s} = J'(\mathfrak{x})\frac{s-s_1\cos\varphi-\varphi_1}{\mathfrak{x}}n^2$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial s^2} = J'(\mathfrak{x})\frac{s_1^2\sin^2\varphi-\varphi_1}{\mathfrak{x}^3}n^4 + J''(\mathfrak{x})\frac{(s-s_1\cos\varphi-\varphi_1)^2}{\mathfrak{x}^2}n^4$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\varphi^2} = J'(\mathfrak{x})\left(\frac{ss_1\cos\varphi-\varphi_1}{\mathfrak{x}}n^2 - \frac{s^2s_1^2\sin^2\varphi-\varphi_1}{\mathfrak{x}^3}n^4\right)$$
$$+ J''(\mathfrak{x})\frac{s^2s_1{}^2\sin^2\varphi-\varphi_1}{\mathfrak{x}^2}n^4.$$

Die Substitution dieser Werthe in (144.) liefert:

$$\frac{1}{\psi^2\sqrt{\psi}}\Delta E = n^2\left(J(\mathfrak{x}) + \frac{1}{\mathfrak{x}}J'(\mathfrak{x}) + J''(\mathfrak{x})\right)e^{\pm n\lambda}.$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf die Differential-Gleichung (3.), welcher die Bessel'sche Function $J(\mathfrak{x})$ Genüge leistet, sofort:

$$\Delta E = 0.$$

Somit ist nachgewiesen, dass die Function E an allen Stellen des Raumes der *ersten* unter den drei Hauptbedingungen (10.) Genüge leistet. Was nun ferner die *zweite* jener Bedingungen anbelangt, so erhellt zuvörderst aus der geometrischen Bedeutung, welche die Parameter λ, s, φ für irgend einen Punct (x, y, z) besitzen, dass dieselben mit alleiniger Ausnahme des Anfangspunctes O allenthalben stetig bleiben, dass ferner Gleiches für die Ableitungen $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial z}$ und $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial z}$ gilt, dass hingegen die Ableitungen $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ unstetig werden, sobald der Punct (x, y, z) in die x-Achse fällt. Von der letzterwähnten Unstetigkeit bleiben jedoch die Ableitungen $\frac{\partial E}{\partial x}$, $\frac{\partial E}{\partial y}$, $\frac{\partial E}{\partial z}$ der Function

$$E = Ce^{\pm n\lambda}.\sqrt{\lambda^2+s^2}\,J\left[n\sqrt{s^2+s_1{}^2-2ss_1\cos(\varphi-\varphi_1)}\right]$$

unberührt, weil (zufolge 136.) s Null wird, sobald der Punct (x, y, z) in die x-Achse fällt, mithin

$$\frac{\partial J}{\partial\varphi} = J'\left(n\sqrt{s^2+s_1{}^2-2ss_1\cos\varphi-\varphi_1}\right).\frac{nss_1\sin\varphi-\varphi_1}{\sqrt{s^2+s_1{}^2-2ss_1\cos\varphi-\varphi_1}}$$

und ebenso $\frac{\partial E}{\partial \varphi}$ in diesem Fall verschwindet. Beachtet man daher, dass die Bessel'sche Function $J(\mathfrak{x})$, ebenso deren Ableitung $J'(\mathfrak{x})$ für alle Werthe des Argumentes $\mathfrak{x}$ stetig sind (4. b.), so ergiebt sich sofort, dass E, $\frac{\partial E}{\partial x}$, $\frac{\partial E}{\partial y}$, $\frac{\partial E}{\partial z}$, mit alleiniger Ausnahme des Anfangspunctes O, allenthalben im Raume stetig sind.

Was endlich die *dritte* Hauptbedingung anbelangt, so kommt diese nicht in Betracht, so lange wir bei einem endlichen Raume bleiben. Wir können daher vorläufig folgendes Resultat hinstellen:

(**145.**) *Jede der Functionen* $\overset{+}{E}$ *und* $\overset{-}{E}$ (141.) *genügt innerhalb eines beliebigen Raumes, der den Anfangspunct O n i c h t in sich enthält, und nach Aussen hin ringsum begrenzt ist, allenthalben den Hauptbedingungen* (10.).

Um die Natur der Functionen E genauer kennen zu lernen, müssen wir nun etwas weiter ausholen, namentlich zuerst gewisse Eigenschaften zu Tage treten lassen, welche die Bessel'sche Function J in Bezug auf das hier in Anwendung gebrachte Coordinatensystem (λ, s, φ) besitzt.

B. b. Untersuchung der Function *J.*

Wenn wir das in (12.) angegebene Theorem auf die Function E anwenden, d. i. die Formel

$$(\mathbf{146.})\qquad \mathsf{S}\left(T\frac{dE}{dN} - E\frac{dT}{dN}\right)ds = \begin{cases} 0 \\ 4\pi E, \end{cases}$$

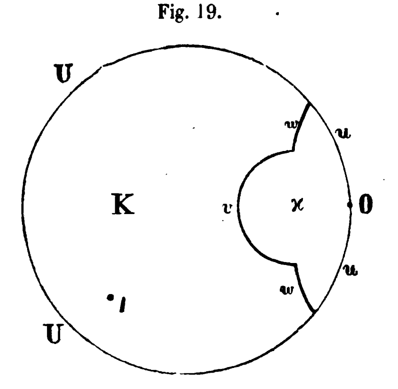
bilden wollen, so müssen wir uns dabei, was die Integration anbelangt, der Oberfläche eines Raumes bedienen, innerhalb dessen E allenthalben die Hauptbedingungen erfüllt. Wir werden demnach (zufolge 145.) hierzu irgend einen Raum wählen können, der nach Aussen ringsum begrenzt ist und den Punct O nicht in sich enthält. Ob die Formel noch anwendbar ist, wenn O allerdings nicht *innerhalb*, jedoch *an der Oberfläche* dieses Raumes liegt, wird sich *im Allgemeinen* nicht entscheiden lassen, sondern abhängig sein von der sonstigen Lage und Gestalt, welche der Raum *in jedem besondern Falle* besitzt. So z. B. ist es zweifelhaft, ob eine zum System der λ-Flächen gehörige, also durch O hindurch-

gehende Kugelfläche bei Bildung jener Formel angewendet werden darf oder nicht. Und doch ist gerade dies eine Frage, deren Beantwortung für den ferneren Gang unserer Untersuchung von durchgreifender Wichtigkeit ist. Die Entscheidung derselben wird daher vor der Hand unsere ganze Thätigkeit in Anspruch nehmen.

Gegeben sei eine der eben genannten Kugelflächen. Ferner sei ein *fester* Punct 1 gegeben, der irgendwo innerhalb der Kugel, jedoch nicht gerade auf ihrer Oberfläche liegt, und der also von O aus irgend welchen, wenn auch noch so kleinen, Abstand haben soll.

Das Innere der Kugel werde durch irgend welche, zwischen den beiden Puncten O und 1 hindurchgehende Wand in zwei Räume $\varkappa$ und K zerlegt, *so dass O auf der Oberfläche von $\varkappa$ und* 1 *im Innern von K liegt.* Diese Wand denken wir uns *beweglich* und zwar ihrer Lage und Gestalt nach *von einem veränderlichen Parameter P der Art abhängig, dass man durch Vergrösserung von P alle zu jener Wand gehörigen Flächenelemente beliebig nahe an den Punct O heranzuziehen im Stande ist*, ohne dass dabei, so lange nicht P geradezu $= \infty$ geworden ist, irgend eines jener Flächen-Elemente mit O in Contact kommen kann. Am einfachsten würde man diesen Anforderungen genügen, wenn man für jene Wand eine mit dem Radius $\frac{1}{P}$ um O beschriebene Kugelfläche oder vielmehr eine Calotte dieser Kugelfläche nehmen wollte. Zur Erleichterung der später erforderlichen Rechnungen ist es jedoch zweckmässig, der Wandfläche eine complicirtere Gestalt zu geben. Wir wollen sie aus zwei Flächenstücken v, w (Fig. 19.) zusammensetzen und die Gestalt und Lage beider an einen und denselben Parameter P der Art binden, dass alle Elemente der ganzen Wandfläche $v + w$ für jeden Werth P jenes Parameters zwischen zwei concentrischen, um O beschriebenen Kugelflächen

Fig. 19.



liegen, von denen die eine den Radius $\frac{2}{P}$, die andere den Radius $\frac{\sqrt{2}}{P}$ besitzt. Bei wachsendem P werden dann alle Elemente der Wandfläche von der äusseren Kugelfläche $\left(\text{mit dem Radius } \frac{2}{P}\right)$ näher und näher an O herangedrängt werden, während sie gleichzeitig, so lange nicht P geradezu $=\infty$ geworden ist, von der innern Kugelfläche $\left(\text{mit dem Radius } \frac{\sqrt{2}}{P}\right)$ fortwährend verhindert werden, mit O in Contact zu kommen.

Was die Lage der beiden Puncte 1 und O in Bezug auf den Raum K anbelangt, so ergiebt sich nun sofort, dass, bis zu welchem endlichen Werthe P auch immer anwachsen mag, O fortwährend *ausserhalb*, und 1 fortwährend *innerhalb* jenes Raumes bleiben wird. *Demnach werden* (zufolge 145.) *die Functionen E innerhalb und auch an der Oberfläche des Raumes K fortwährend den Hauptbedingungen Genüge leisten.* Verstehen wir daher unter E oder $E(x, y, z)$ den Werth, welchen irgend eine jener Functionen in dem variablen Puncte (x, y, z) besitzt, ferner unter E_1 den Werth derselben in dem festen Puncte 1, endlich unter T den reciproken Werth der zwischen (x, y, z) und 1 vorhandenen Entfernung, so wird (nach 12.) das über die ganze Begrenzung von K ausgedehnte Integral:

$$\mathrm{S}\left(T\frac{dE}{dN} - E\frac{dT}{dN}\right)ds$$

fortwährend $=-4\pi E_1$ sein, d. h. den Werth $4\pi E_1$ fortwährend behalten, wie gross auch immer der endliche Werth sein mag, bis zu welchem wir den Parameter P anwachsen lassen.

Wir benennen die beiden Theile, in welche die Oberfläche der gegebenen Kugel durch die Scheidewand $v+w$ zerlegt wird, mit U und u, der Art, dass U zur Begrenzung von K und u zu der von x gehört; und bezeichnen die Werthe, welche das Integral

$$\mathrm{S}\left(T\frac{dE}{dN} - E\frac{dT}{dN}\right)ds \tag{146.}$$

successive erhalten wird, wenn man dasselbe nacheinander über jedes einzelne der Flächenstücke U, u, v, w ausdehnt, respective mit (U), (u),

(v), (w), wobei die Normale N bei U und u aus dem Innern der gegebenen Kugelfläche hinauslaufend, bei v und w aus K nach $\varkappa$ laufend gedacht werden soll. Beachten wir, dass das über die ganze Begrenzung von K ausgedehnte Integral alsdann durch $(U) + (v) + (w)$ dargestellt wird, so sind wir also vorhin zu dem Resultat gelangt, dass für einen *beliebig grossen*, jedoch *endlichen* Werth des Parameters P immer die Gleichung stattfindet:

$$(147.) \qquad (U) + (v) + (w) = 4\pi E_1 .$$

Wir wollen nun voraussetzen, dass die gegebene Kugelfläche zur Gattung derjenigen gehört, welche den Pol $(\lambda = +\infty)$ umschliessen (134. a.), und dass die in Behandlung stehende Function E zur Gattung $\overline{\overline{E}}$ gehört.

(148.) *Es wird sich*, wie sogleich ausführlich erörtert werden soll, *zeigen*, *dass unter diesen Umständen die von der Gestalt der Flächenstücke u, v, w, also von der Grösse des Parameters P abhängenden Werthe der Integrale* (u), (v), (w) *gegen Null convergiren*, *sobald P weiter und weiter anwächst.* Genauer ausgedrückt: Es wird sich zeigen, dass man dem Parameter P immer einen endlichen Werth zuertheilen kann, welcher so gross ist, dass jedes jener drei Integrale (u), (v), (w) kleiner wird als eine zuvor gegebene beliebig kleine Grösse. Ist dieses dargethan, so wird man sich also, wie klein eine gegebene Grösse ξ auch immer sein mag, stets einen Werth des Parameters P denken können, welcher endlich ist, für welchen daher die Gleichung (147.)

$$(U) - 4\pi E_1 = (v) + (w)$$

stattfindet, und welcher gleichzeitig so gross ist, dass

$$(u) < \frac{\xi}{3}, \quad (v) < \frac{\xi}{3}, \quad (w) < \frac{\xi}{3}$$

wird. Aus diesen Formeln folgt aber

$$(U) - 4\pi E_1 < \frac{2\xi}{3}$$

oder auch

$$(U) + (u) - 4\pi E_1 < \xi,$$

wo nun $(U) + (u)$ das Integral (146.) in seiner Ausdehnung über die ganze gegebene Kugelfläche vorstellt. Hiemit ist dann also bewiesen, dass

der Werth dieses Integrales von $4\pi E_1$ um weniger als ξ verschieden ist. Da nun ξ eine willkührlich gewählte Grösse von beliebiger Kleinheit vorstellt, so ist demnach dargethan, dass der genannte Unterschied geringer ist, als jede überhaupt denkbare kleine Grösse, also dargethan, dass derselbe $= 0$ sein muss. Sobald folglich die zuvor gemachte Behauptung (148.) als richtig erwiesen ist, wird damit auch zugleich die Richtigkeit folgendes Ausspruches ausser Zweifel sein:

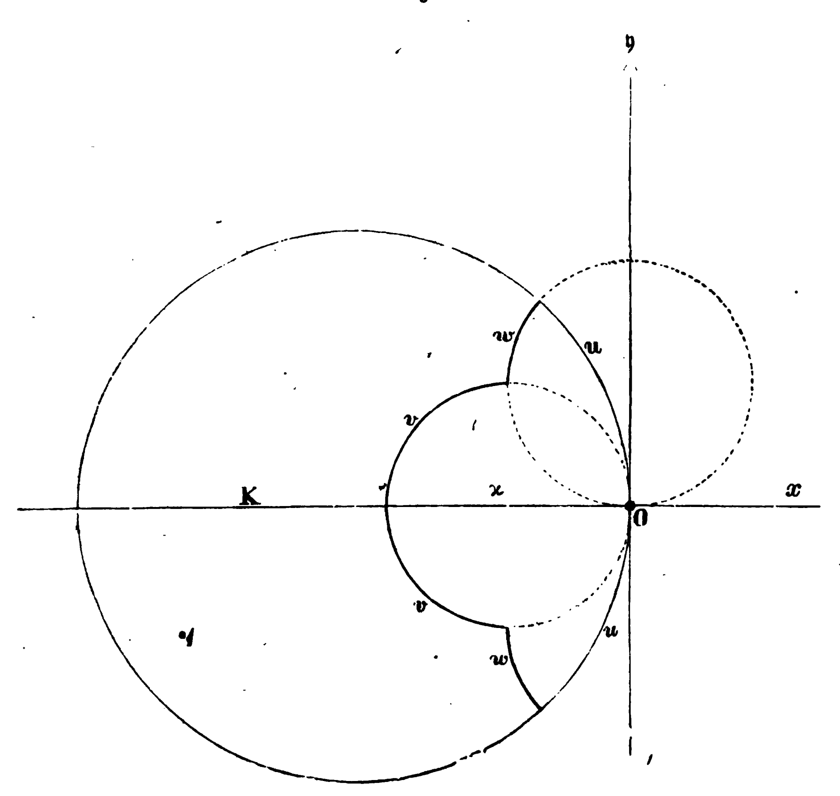
(149.) *Das in* (12.) *aufgestellte Theorem lässt sich auf eine den Pol* ($\lambda = +\infty$) *umschliessende, zum System der λ-Flächen gehörende Kugel und auf eine zur Gattung der $\overset{=}{E}$ gehörige Function ohne irgend welche Modification in Anwendung bringen.*

Allerdings wird solches dann immer nur für den Fall dargethan sein, dass der feste Punct 1, wie wir hier angenommen haben, *innerhalb* der Kugel liegt. Man kann sich aber, wie man leicht übersieht, genau derselben Methode, welche hier benutzt worden ist, andererseits auch bedienen, um die Anwendbarkeit des Theoremes (12.) für den Fall nachzuweisen, dass der Punct 1 *ausserhalb* der Kugel liegt. Hierauf näher einzugehen, wird daher nicht nöthig sein.

Kaum der Erwähnung bedarf es, dass das Theorem (12.) ferner auch dann anwendbar sein wird, falls man an Stelle der den Pol ($\lambda = +\infty$) eine den Pol ($\lambda = -\infty$) umschliessende Kugelfläche nimmt, falls man nur gleichzeitig auch an Stelle der zur Gattung $\overset{=}{E}$ gehörigen eine zur Gattung $\overset{+}{E}$ gehörige Function treten lässt.

Beweis der Behauptung (148.) Die Flächenstücke v und w, aus welchen die Scheidewand der Räume K und $\varkappa$ besteht, seien Rotationsflächen in Bezug auf die x-Achse. Und zwar soll der Durchschnitt von v mit der Meridianebene das Bogenstück eines kleinen Kreises sein, welcher die $\mathfrak{y}$-Achse in O berührt, andererseits der Durchschnitt von w mit der Meridian-Ebene das Bogenstück eines kleinen Kreises sein, welcher die x-Achse in O tangirt (Fig. 20.), so dass die erzeugende Curve der Fläche v zum System der λ-Curven, die der Fläche w zum System der ϑ-Curven gehört. Der Einfachheit willen seien die Radien dieser beiden Kreise einander gleich. Bezeichnet man die gemeinschaftliche Länge derselben mit $\frac{1}{P}$, ferner die Länge

Fig. 20.



des Radius der gegebenen Kugelfläche mit $\frac{1}{p}$, so wird (man sehe 134 – 137.) für die Puncte

des Flächenstückes u $\lambda = p$,
für die von v $\lambda = P$,
und für die von w $s = P$

sein. Ferner ergiebt sich leicht, dass für die

Puncte von u s zwischen P und ∞,
für die von v s zwischen 0 und P,
und für die von w s zwischen p und P

variirt; endlich, dass für jedes dieser drei Flächenstücke

φ von 0 bis 2π

hin variabel ist. Bezeichnet man die Elemente der Flächenstücke u, v, w respective mit du, dv, dw, und die auf dem Element errichtete Normale überall mit ein und demselben Buchstaben N, so wird zufolge (88.e.):

$$du = \pm \frac{\vartheta}{\psi^2}\, d\vartheta\, d\varphi, \quad \frac{d\lambda}{dN} = \pm\psi \qquad (N \text{ die Normale von } u)$$

$$dv = \pm \frac{\vartheta}{\psi^2}\, d\vartheta\, d\varphi, \quad \frac{d\lambda}{dN} = \pm\psi \qquad (N \text{ die von } v)$$

$$dw = \pm \frac{\vartheta}{\psi^2}\, d\lambda\, d\varphi, \quad \frac{d\vartheta}{dN} = \pm\psi \qquad (N \text{ die von } w).$$

Nimmt man daher bei Berechnung der Werthe der Integrale (u), (v), (w) auf das Vorzeichen dieser Werthe keine Rücksicht, so wird:

$$(150.)\quad \begin{cases} (u) = \int\limits_P^\infty \int\limits_0^{2\pi} \left(T\frac{\partial E}{\partial\lambda}\psi \pm E\frac{dT}{dN}\right)\frac{\vartheta}{\psi^2}\, d\vartheta\, d\varphi, & \text{worin } \lambda = p, \\ (v) = \int\limits_0^P \int\limits_0^{2\pi} \left(T\frac{\partial E}{\partial\lambda}\psi \pm E\frac{dT}{dN}\right)\frac{\vartheta}{\psi^2}\, d\vartheta\, d\varphi, & \text{worin } \lambda = P, \\ (w) = \int\limits_p^P \int\limits_0^{2\pi} \left(T\frac{\partial E}{\partial\vartheta}\psi \pm E\frac{dT}{dN}\right)\frac{\vartheta}{\psi^2}\, d\lambda\, d\varphi, & \text{worin } \vartheta = P \text{ ist.} \end{cases}$$

Absichtlich sind hier die Differential-Quotienten von T nach N ungeändert gelassen, obwohl man hier ebenso hätte verfahren dürfen, wie bei denen von E nach N, z. B. in der ersten Formel

$$\frac{dT}{dN} = \frac{\partial T}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dN} = \pm\frac{\partial T}{\partial\lambda}\psi$$

hätte setzen dürfen.

Da die Radien der beiden kleinen Kreise, welche den Durchschnitt der Wandfläche $v+w$ darstellen, beide $= \frac{1}{P}$ sind, so werden alle Flächen-Elemente, aus welchen diese Wand besteht, von O aus eine zwischen $\frac{2}{P}$ und $\frac{\sqrt{2}}{P}$ schwankende Entfernung besitzen, wie man leicht aus Fig. 20. erkennt. Es wird demnach diese Wandfläche in der That der früher gemachten Angabe entsprechen, nämlich vollständig zwischen zwei concentrischen Kugelflächen enthalten sein, von welchen die eine mit dem Radius $\frac{2}{P}$, die andere mit dem Radius $\frac{\sqrt{2}}{P}$ um O beschrieben ist.

Nun ist für eine Function E, welche zur Gattung der $\overline{E}$ gehört, nach (141.):

$$(151.)\quad \begin{cases} E = \sqrt{\psi}\, e^{-n\lambda} J \\ \psi \dfrac{\partial E}{\partial \lambda} = \sqrt{\psi}\, e^{-n\lambda} (\lambda - n\psi) J \\ \psi \dfrac{\partial E}{\partial s} = \sqrt{\psi}\, e^{-n\lambda} \left(sJ + \psi \dfrac{\partial J}{\partial s} \right), \end{cases}$$

wo $\psi = \lambda^2 + s^2$, $J = J\left(n\sqrt{s^2 + s_x^2 - 2s\, s_x \cos\varphi - \varphi_x}\right)$ ist, und wo s_x φ_x willkührliche Constanten vorstellen, endlich n eine willkührliche jedoch *positive* Constante bezeichnet. Durch Substitution dieser Werthe in (150.) wird:

$$(152.)\quad \begin{cases} (u) = \displaystyle\int_P^\infty \int_0^{2\pi} \frac{s\, e^{-n\lambda}}{\psi\sqrt{\psi}} \left((\lambda - n\psi) T \pm \frac{dT}{dN} \right) J\, ds\, d\varphi, & (\lambda = p) \\ (v) = \displaystyle\int_0^P \int_0^{2\pi} \frac{s\, e^{-n\lambda}}{\psi\sqrt{\psi}} \left((\lambda - n\psi) T \pm \frac{dT}{dN} \right) J\, ds\, d\varphi, & (\lambda = P) \\ (w) = \displaystyle\int_p^P \int_0^{2\pi} \frac{s\, e^{-n\lambda}}{\psi\sqrt{\psi}} \left(\left(sJ + \psi \frac{\partial J}{\partial s} \right) T \pm J \frac{dT}{dN} \right) d\lambda\, d\varphi, & (s = P). \end{cases}$$

Setzt man $(u) = \int_0^{2\pi} [u]\, d\varphi$, $(v) = \int_0^{2\pi} [v]\, d\varphi$, $(w) = \int_0^{2\pi} [w]\, d\varphi$, so hat man für die einfachen Integrale $[u]$, $[v]$, $[w]$ folgende Werthe:

$$(153.)\quad \begin{cases} [u] = \displaystyle\int_P^\infty \frac{s\, e^{-n\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}} \left(\frac{\lambda T \pm \frac{dT}{dN}}{\lambda^2 + s^2} - nT \right) J\, ds, & (\lambda = p) \\ [v] = \displaystyle\int_0^P \frac{s\, e^{-n\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}} \left(\frac{\lambda T \pm \frac{dT}{dN}}{\lambda^2 + s^2} - nT \right) J\, ds, & (\lambda = P) \\ [w] = \displaystyle\int_p^P \frac{s\, e^{-n\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}} \left(\frac{sT \pm \frac{dT}{dN}}{\lambda^2 + s^2} J + T \frac{\partial J}{\partial} \right) d\lambda, & (s = P). \end{cases}$$

Da nun offenbar der Werth eines Integrales $\int_0^{2\pi} f(\varphi, P)\, d\varphi$ mit wachsendem P zu Null convergiren muss, falls solches von der Function $f(\varphi, P)$ für

beliebige Werthe von φ gilt, so wird die Richtigkeit der Behauptung (148.) erwiesen sein, sobald dargethan ist, dass die Werthe der Integrale $[u]$, $[v]$, $[w]$ mit wachsendem P gegen Null convergiren, welchen Werth das darin noch enthaltene variable φ auch annehmen mag.

Die Werthe von J und J' sind (nach 4. b.) immer endlich. Ebenso verhält es sich aber in diesen Integralen auch mit T und $\frac{dT}{dN}$. Da es sich hier nämlich nur um diejenigen Werthe handelt, welche die Integrale $[u]$, $[v]$, $[w]$ für einen äusserst grossen Parameter P annehmen, so können wir uns denselben von Beginn der Untersuchung an bereits so gross denken, dass alle zur Begrenzung des Raumes $\varkappa$ gehörigen Flächen-Elemente von dem festen Puncte 1 um irgend welche, wenn auch kleine, Strecke entfernt sind. Da nun T in jenen Integralen den reciproken Werth der zwischen einem solchen Flächen-Element und zwischen 1 vorhandenen Entfernung vorstellt, so werden alsdann T und ebenso auch $\frac{dT}{dN}$ für alle jene Flächen-Elemente von Beginn der Untersuchung an endliche Werthe besitzen, und endliche Werthe behalten, falls im weiteren Verlaufe der Untersuchung P mehr und mehr anwächst, so dass man leicht feste endliche Grenzen würde angeben können, innerhalb deren sämmtliche in den Integralen $[u]$, $[v]$, $[w]$ in Betracht kommende Werthe von T und $\frac{dT}{dN}$ liegen, und innerhalb deren dieselben auch dann bleiben, wenn P über jede Grenze hinaus anwächst.

Was nun das Integral $[u]$ *anbelangt*, so lässt sich dasselbe in zwei Theile zerlegen. Der erste derselben lautet, wenn man für λ seinen Werth p substituirt:

$$\int_p^\infty \frac{s\, e^{-np}}{\sqrt{p^2+s^2}} \frac{pT \pm \frac{dT}{dN}}{p^2+s^2} J\, ds.$$

Dieser muss, wenn man den grössten Zahlenwerth, welchen der Ausdruck $e^{-np}\left(pT \pm \frac{dT}{dN}\right)J$ innerhalb der Integrationsgrenzen annehmen kann, und welcher jedenfalls endlich sein wird, mit A bezeichnet, kleiner als

$$A\int_p^\infty \frac{s\, ds}{(p^2+s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

um so mehr also kleiner als

$$A\int_P^\infty \frac{s\,ds}{s^3} = \frac{A}{P}$$

sein; und wird daher mit wachsendem P zu Null convergiren.

Der zweite Theil des Integrales [u] lautet:

$$ne^{-np}\int_P^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2+p^2}}.T.J.ds$$

oder, wenn man für T und J ihre Werthe aus (137. a.) und (151.) substituirt:

$$ne^{-np}\int_P^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2+p^2}}\;\frac{\sqrt{\lambda_1^2+s_1^2}\;\sqrt{p^2+s^2}}{\sqrt{(p-\lambda_1)^2+(s^2+s_1^2-2ss_1\cos\overline{\varphi-\varphi_1})}}.J(n\sqrt{s^2+s_x^2-2ss_x\cos\overline{\varphi-\varphi_x}})\,ds$$

wo λ_1, s_1, φ_1 die Coordinaten des festen Punctes 1 vorstellen, und s_x, φ_x willkührliche Constanten sind. Durch Fortlassung des unveränderlichen, endlichen Factors $ne^{-np}\sqrt{\lambda_1^2+s_1^2}$ verwandelt sich dieses Integral in:

$$\int_P^\infty \frac{s\,J(n\sqrt{s^2+s_x^2-2ss_x\cos\overline{\varphi-\varphi_x}})}{\sqrt{(p-\lambda_1)^2+(s^2+s_1^2-2ss_1\cos\overline{\varphi-\varphi_1})}}\,ds,$$

also, wenn man statt der von s Unabhängigen p, λ_1, s_1, φ_1, s_x, φ_x, φ zur Abkürzung andere Grössen a, b. α, β einführt, in:

$$(i) = \int_P^\infty \frac{s\,J(n\sqrt{s^2+2as+b})}{\sqrt{s^2+2\alpha s+\beta}}\,ds.$$

Um nachzuweisen, dass der Werth dieses Integrales mit wachsendem P zu Null convergirt, führe ich statt s eine andere Variable η ein, indem ich

$$(154.)\quad \begin{cases} n^2(s^2+2as+b) = \eta^2, \\ \text{also}\quad n^2(s+a)\,ds = \eta\,d\eta \end{cases}$$

setze, und den mit $s = P$ correspondirenden Werth von η durch $\eta = H$ bezeichne. Dann wird:

$$(i) = \int_H^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2+2\alpha s+\beta}}\cdot\frac{\eta}{n^2(s+a)}\,J(\eta)\,d\eta$$

d. i. mit Rücksicht auf (154.):

$$(i) = \frac{1}{n}\int_H^\infty \frac{s}{s+a}\;\frac{\sqrt{s^2+2as+b}}{\sqrt{s^2+2\alpha s+\beta}}\;J(\eta)\,d\eta,$$

oder, wenn man den hier unter dem Integrale in $J(\eta)$ multiplicirten Factor in seiner Abhängigkeit von η mit $f(\eta)$ bezeichnet, also

$$(155.)\qquad \frac{s}{s+a}\,\frac{\sqrt{s^2+2as+b}}{\sqrt{s^2+2\alpha s+\beta}} = f(\eta).$$

setzt:

$$(156.)\qquad (i) = \frac{1}{n}\int\limits_H^\infty f(\eta).J(\eta)\,d\eta.$$

Die Function $f(\eta)$ convergirt, falls η, oder, was (nach 154.) dasselbe ist, falls s ins Unendliche anwächst, offenbar gegen 1. Um diese Function näher zu untersuchen, differentiiren wir die Gleichung (155.). Dadurch ergiebt sich:

$$\frac{f'(\eta)}{f(\eta)} = \left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} + \frac{s+a}{s^2+2as+b} - \frac{s+\alpha}{s^2+2\alpha s+\beta}\right\}\frac{ds}{d\eta}$$

oder mit Rücksicht auf (154.):

$$\frac{f'(\eta)}{f(\eta)} = \left\{\frac{a}{s(s+a)} + \frac{(\alpha-a)s^2+(\beta-b)s+(a\beta-\alpha b)}{(s^2+2as+b)(s^2+2\alpha s+\beta)}\right\}\frac{\eta}{n^2(s+a)}.$$

Da nun der Ausdruck $\{\ \}$ für sehr grosse Werthe von s oder η nahezu $= \frac{a}{s^2} + \frac{(\alpha-a)s^2}{s^4} = \frac{\alpha}{s^2}$ wird, also mit der Constanten α gleiches Vorzeichen hat, ferner alsdann $\frac{\eta}{s+a}$ und ebenso auch $f(\eta)$ (155.) stets positiv sein werden, so folgt sofort, dass $f'(\eta)$ bei hinreichend grossem η, je nachdem α positiv oder negativ ist, ebenfalls entweder stets positiv oder stets negativ sein wird. Es wird daher die Function $f(\eta)$, welche, wie vorhin bemerkt war, für $\eta=\infty$ den Werth 1 hat, bei zunehmendem η zuletzt entweder in einen Zustand des fortwährenden Wachsens oder in einen Zustand des fortwährenden Abnehmens treten. Wir denken uns nun in (i) den Parameter P oder den an denselben geknüpften Werth H gleich von Anfang so gross, dass jener Zustand der Function $f(\eta)$ bei $\eta=H$ bereits eingetreten ist. Dann wird also die Function $f(\eta)$, welche sowohl für $\eta=H$ als auch für $\eta=\infty$ endliche Werthe besitzt, während η von H nach ∞ fortgeht, entweder beständig abnehmen oder beständig zunehmen. Folglich wird dann (nach 5.) das Integral (i) einen festen endlichen, natürlich von seiner untern Grenze H abhängenden Werth besitzen. Lässt man daher diese untere Grenze sich der obern mehr und mehr nähern, d. h. lässt man H oder, was dasselbe ist, P ins Unendliche anwachsen, so wird der Werth des Integrales (i) gegen Null convergiren.

Was ferner das Integral [v] *anbelangt,* so ist, wenn man für λ seinen Werth P substituirt:

$$[v] = e^{-nP}\int_0^P \frac{s}{\sqrt{s^2+P^2}}\left\{\frac{PT\pm\frac{dT}{dN}}{s^2+P^2}-nT\right\}.J\,ds.$$

Dasselbe wird daher, falls man den jedenfalls endlichen Maximalwerth des Ausdruckes $\{\ \}.J$ mit A bezeichnet, kleiner als

$$A\,e^{-nP}\int_0^P ds = A\,e^{-nP}P$$

sein, und muss demnach bei wachsendem P gegen Null convergiren.

Was endlich das Integral [w] *anbelangt,* so erhält dasselbe, wenn man für s seinen Werth P substituirt und beachtet, dass J und $\frac{\partial J}{\partial s}$ von λ frei sind, folgende Gestalt:

$$(157.)\quad [w] =$$

$$= K.J\left(n\sqrt{P^2+s_x^2-2Ps_x\cos(\varphi-\varphi_x)}\right)$$

$$+K_1.J'\left(n\sqrt{P^2+s_x^2-2Ps_x\cos(\varphi-\varphi_x)}\right).\frac{P-s_x\cos(\varphi-\varphi_x)}{\sqrt{P^2+s_x^2-2Ps_x\cos(\varphi-\varphi_x)}},$$

wo K und K_1 folgende Werthe besitzen:

$$K = \int_p^P \frac{Pe^{-n\lambda}}{\sqrt{P^2+\lambda^2}}\,\frac{PT\pm\frac{dT}{dN}}{P^2+\lambda^2}\,d\lambda$$

$$K_1 = \int_p^P \frac{Pe^{-n\lambda}}{\sqrt{P^2+\lambda^2}}\,T\,d\lambda.$$

Bezeichnet man die jedenfalls endlichen Maximalwerthe der beiden Ausdrücke $\frac{PT\pm\frac{dT}{dN}}{P^2+\lambda^2}$ und T mit A und B, so wird offenbar:

$$K < A\int_p^P e^{-n\lambda}\,d\lambda$$

$$K_1 < B\int_p^P e^{-n\lambda}\,d\lambda$$

d. i.

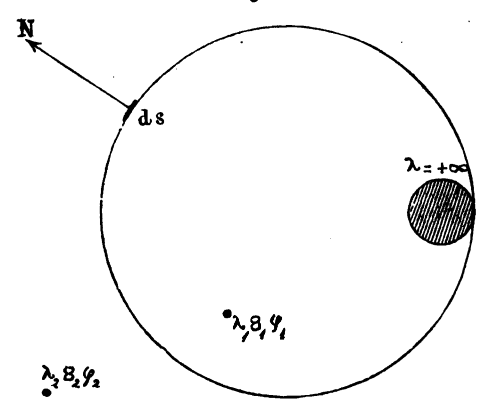
$$K < \frac{A}{n}(e^{-np} - e^{-nP})$$

$$K_1 < \frac{B}{n}(e^{-np} - e^{-nP})$$

sein. Da demnach K und K_1 stets *endlich* bleiben, die Functionen $J(\mathfrak{r})$, $J'(\mathfrak{r})$ aber nach (4. c.) mit wachsendem $\mathfrak{r}$ gegen Null convergiren, so wird $[w]$ (zufolge 157.) mit zunehmendem P ebenfalls gegen Null convergiren.

Wir werden nun von dem Ergebniss (149.) sofort Gebrauch machen. Es sei irgend eine zum System der λ-Flächen gehörige Kugel gegeben, welche den Pol ($\lambda = +\infty$) umschliesst; das Element ihrer Oberfläche werde mit ds und die nach Aussen hin errichtete Normale mit N bezeichnet. Ferner mögen zwei feste Puncte angenommen werden (λ_1, ϑ_1, φ_1) *innerhalb* der Kugel und (λ_2, ϑ_2, φ_2) *ausserhalb* derselben. Da der Parameter λ im Abnehmen begriffen ist, während man von Kugelflächen, die den Pol ($\lambda = +\infty$) enge umschliessen, zu Kugelflächen übergeht, die denselben in weiterer Entfernung umgeben, so wird

Fig. 21.



$$(158.) \qquad +\infty > \lambda_1 > \lambda > \lambda_2$$

sein, vorausgesetzt, dass man unter λ, ϑ, φ die Coordinaten irgend eines Punctes versteht, der entweder *auf der Kugelfläche* (ds) *selber*, oder doch wenigstens dieser *sehr nahe* liegt. Aus dem eben erwähnten Abnehmen des Parameters λ folgt ferner, dass der Differential-Quotient $\frac{d\lambda}{dN}$ negativ sein, dass derselbe also (mit Rücksicht auf 88. e.) folgenden Werth besitzen muss:

$$(159.) \qquad \frac{d\lambda}{dN} = -\psi = -(\lambda^2 + \vartheta^2).$$

Nimmt man nun irgend welche zur Gattung der $\bar{\bar{E}}$ (141.) gehörige Function:

$$(\mathbf{160.})\quad \bar{\bar{E}} = \bar{\bar{E}}(\vartheta, \omega, \varphi) = e^{-p\lambda}\sqrt{\psi}\, J_{0x}^{(p)}$$

$$\begin{cases} \psi = \lambda^2 + s^2, \\ J_{0x}^{(p)} = J\left[p\sqrt{s^2 + s_x^2 - 2 s s_x \cos(\varphi - \varphi_x)}\right] \end{cases}$$

wo s_x, φ_x *willkührliche Constanten* bezeichnen, die etwa als die Coordinaten eines *irgendwo* im Raume gelegenen *festen* Punctes $(\lambda_x, s_x, \varphi_x)$ angesehen werden können, und wo p eine willkührliche Constante von positivem Werthe bezeichnet; so ist (nach 149.):

$$(\mathbf{161.\ a.})\quad \mathsf{S}\left(T\frac{d\bar{\bar{E}}}{dN} - \bar{\bar{E}}\frac{dT}{dN}\right) ds = 4\pi \bar{\bar{E}}(\lambda_1, s_1, \varphi_1)$$

$$(\mathbf{161.\ b.})\quad \mathsf{S}\left(T\frac{d\bar{\bar{E}}}{dN} - \bar{\bar{E}}\frac{dT}{dN}\right) ds = 0,$$

falls man in der ersten Formel unter T die reciproke Entfernung des Punctes (λ, s, φ) von der innern Stelle $(\lambda_1, s_1, \varphi_1)$, in der zweiten hingegen die reciproke Entfernung jenes Punctes von der äussern Stelle $(\lambda_2, s_2, \varphi_2)$ versteht, und in beiden Formeln die Integration über alle Elemente ds der gegebenen Kugelfläche ausgedehnt ansieht. Es hat demgemäss (nach 140. und mit Berücksichtigung von 158.) T in der ersten Formel den Werth:

$$(\mathbf{162.\ a.})\quad T = T_{01} = \sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}\int_{n=0}^{n=\infty} e^{n(\lambda-\lambda_1)} J_{01}^{(n)}\, dn$$

und in der zweiten Formel den Werth:

$$(\mathbf{162.\ b.})\quad T = T_{02} = \sqrt{\psi}\sqrt{\psi_2}\int_{n=0}^{n=\infty} e^{n(\lambda_2-\lambda)} J_{02}^{(n)}\, dn.$$

Die Formeln (161.) sollen nun durch Substitution der Werthe von $\bar{E}$ und T weiter entwickelt werden. Beachtet man, dass die Bessel'sche Function $J(x)$ zufolge (4. a.) eine *gerade* Function von x ist und dass daher, was den Ausdruck

$$J^{(n)}_{\alpha\beta} = J\left(n\sqrt{s_\alpha^2 + s_\beta^2 - 2s_\alpha s_\beta \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)}\right)$$

anbelangt, $J^{(n)}_{\alpha,\beta} = J^{(-n)}_{\alpha,\beta}$ sein wird, so ergiebt sich sofort, dass die Werthe der beiden T (162. a. und b.) in einander übergehen, sobald man die beiden Indices 1 und 2 mit einander, und gleichzeitig n mit $-n$ vertauscht. Durch dieselbe Operation wird daher auch die linke Seite der Gleichung (161. a.) in die linke Seite der Gleichung (161. b.) umgewandelt werden können. Man wird also, sobald die Formel (161. a.) durch Ausführung der vorhin genannten Substitutionen transformirt ist, die entsprechende Transformation der Formel (161. b.) sofort dadurch erhalten können, dass man in der erstern 1 mit 2, n mit $-n$ vertauscht, und die rechte Seite fortfallen lässt.

Was nun die Transformation von (161. a.) anbelangt, so verwandelt sich der dort befindliche Ausdruck

$$T\frac{d\bar{\bar{E}}}{dN} - \bar{\bar{E}}\frac{dT}{dN}$$

durch (159.) in:

$$\left(T\frac{d\bar{\bar{E}}}{d\lambda} - \bar{\bar{E}}\frac{dT}{d\lambda}\right)(-\psi),$$

sodann durch (160.) und (162. a.) in:

$$\int_{n=0}^{n=\infty} dn\sqrt{\psi_1}\, e^{-n\lambda_1} J^{(n)}_{01} J^{(p)}_{0x} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\psi}\, e^{n\lambda} \dfrac{\partial}{\partial\lambda}(\sqrt{\psi}\, e^{-p\lambda}) \\ -\sqrt{\psi}\, e^{-p\lambda} \dfrac{\partial}{\partial\lambda}(\sqrt{\psi}\, e^{n\lambda}) \end{array} \right\} (-\psi)$$

d. i. in:

$$\int_{n=0}^{n=\infty} dn\, \psi^2 \sqrt{\psi_1}\, J^{(n)}_{01} J^{(p)}_{0x}\, e^{-n\lambda_1} . e^{(n-p)\lambda} . (n+p).$$

Hierdurch und durch (160.) geht die Formel (161. a.), falls man den constanten Factor $\sqrt{\psi_1}$ auf beiden Seiten unterdrückt, über in:

$$\int_{n=0}^{n=\infty} \left\{ (p+n)\, e^{-n\lambda_1} . e^{(n-p)\lambda} . \mathfrak{S} J^{(n)}_{01} J^{(p)}_{0x}\, \psi^2 ds \right\} dn = 4\pi\, e^{-p\lambda_1} J^{(p)}_{1x},$$

oder, wenn man mit $e^{p\lambda}$ multiplicirt, in:

$$(\alpha.)\quad \int_{n=0}^{n=\infty} \left\{ (p+n)\, e^{-n(\lambda_1-\lambda)} . \mathsf{S}\, J_{01}^{(n)} J_{0x}^{(p)}\, \psi^2\, ds \right\} dn = 4\pi\, e^{-p(\lambda_1-\lambda)} J_{1x}^{(p)} .$$

Der zuvor gemachten Bemerkung zufolge wird daher die Transformation der Formel (161. b.) lauten:

$$(\beta.)\quad \int_{n=0}^{n=\infty} \left\{ (p-n)\, e^{-n(\lambda-\lambda_2)} \mathsf{S}\, J_{02}^{(n)} J_{0x}^{(p)}\, \psi^2\, ds \right\} dn = 0 .$$

Da wir unter $(\lambda_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ und $(\lambda_2, \vartheta_2, \varphi_2)$ irgend welche Puncte verstanden, die respective innerhalb und ausserhalb der gegebenen Kugel liegen, so werden diese Formeln $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ ihre Gültigkeit behalten, falls man die Lage dieser beiden Puncte beliebig variirt, wofern nur immer der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Kugel bleibt. Man wird daher die ϑ- und φ-Coordinaten dieser beiden Puncte ganz beliebig, die λ-Coordinaten derselben jedoch, wie aus (158.) folgt, nur so ändern können, dass die Differenzen

$$\lambda_1 - \lambda \quad \text{und} \quad \lambda - \lambda_2 ,$$

(in welchen λ den Parameter der gegebenen Kugel vorstellt) stets positiv bleiben. Da man demzufolge die Werthe von ϑ_2, φ_2 denen von ϑ_1, φ_1 gleich machen kann, ϑ_2 und φ_2 aber in $(\beta.)$ nur insofern vorkommen, als sie in $J_{02}^{(n)}$ enthalten sind, so wird aus $(\beta.)$ folgen:

$$(\gamma.)\quad \int_{n=0}^{n=\infty} \left\{ (p-n)\, e^{-n(\lambda-\lambda_2)} \mathsf{S}\, J_{01}^{(n)} J_{0x}^{(p)}\, \psi^2\, ds \right\} dn = 0.$$

Beachtet man nun ferner, dass λ_1 und λ_2 in $(\alpha.)$ und $(\gamma.)$ nur insofern vorkommen, als sie sich in den Exponentialgrössen

$$e^{-n(\lambda_1-\lambda)}, \qquad e^{-p(\lambda_1-\lambda)}, \qquad e^{-n(\lambda-\lambda_2)}$$

vorfinden, und dass daher, der soeben gemachten Bemerkung zufolge, jene Formeln gültig bleiben werden, falls man in den Exponenten dieser Grössen für die Differenzen

$$\lambda_1 - \lambda \quad \text{und} \quad \lambda - \lambda_2$$

irgend welche positive Werthe nimmt; so ergeben sich, falls man in jenen beiden Formeln $(\alpha.)$ und $(\gamma.)$ für diese Differenzen ein und denselben

positiven Werth A substituirt und sodann beide einmal addirt, einmal subtrahirt, folgende Gleichungen:

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-An} \mathop{S} J_{01}^{(n)} J_{0x}^{(p)} \psi^2 ds \right\} p\, dn = 2\pi e^{-Ap} J_{1x}^{(p)}$$

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-An} \mathop{S} J_{01}^{(n)} J_{0x}^{(p)} \psi^2 ds \right\} n\, dn = 2\pi e^{-Ap} J_{1x}^{(p)}.$$

Die Integration S erstreckt sich hier auf alle Elemente ds der gegebenen Kugelfläche. ψ sowohl als auch $J_{01}^{(n)}$ und $J_{0x}^{(p)}$ sind abhängig von der Lage dieses Elementes, nämlich abhängig von den Coordinaten λ, ϑ, φ, welche ds besitzt. Und zwar ist diese Abhängigkeit äusserlich in den J durch den zugefügten Index 0 angedeutet, während andererseits die Indices 1 und x ihre Abhängigkeit von den während der Integration S constanten Grössen ϑ_1, φ_1, ϑ_x, φ_x ausdrücken. Um den Ausdruck der Formeln deutlicher und einfacher zu machen, werde ich den Ort des Elementes ds mit $(\lambda_s, \vartheta_s, \varphi_s)$ bezeichnen, und demgemäss die von diesem Ort abhängenden Grössen J und ψ mit dem Index s versehen, also in den J 0 mit s vertauschen. Wir erhalten dann:

(163.)

a) $$\int_{n=0}^{n=\infty} \left(\mathop{S} J_{s1}^{(n)} J_{sx}^{(p)} \psi_s^2 ds \right) e^{-An}.\, dn = \frac{2\pi}{p} e^{-Ap} J_{1x}^{(p)}$$

b) $$\int_{n=0}^{n=\infty} \left(\mathop{S} J_{s1}^{(n)} J_{sx}^{(p)} \psi_s^2 ds \right) e^{-Ap}.\, n\, dn = 2\pi e^{-Ap} J_{1x}^{(p)}$$

wo $\psi_s = \lambda_s^2 + \vartheta_s^2$,

ferner $J_{\alpha\beta}^{(n)} = J\left(n\sqrt{\vartheta_\alpha^2 + \vartheta_\beta^2 - 2\vartheta_\alpha \vartheta_\beta \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)}\right)$

ist, und wo ϑ_1, φ_1, ϑ_x, φ_x willkührliche Constanten, p und A hingegen willkührliche Constanten von *positivem* Werthe vorstellen.

Da in diesen Formeln λ_1 nicht vorkommt, so können wir ϑ_1 und φ_1 als die Coordinaten eines Punctes ansehen, der auf der durch ϑ_1 und

φ_1 bestimmten senkrechten Trajectorie der λ-Flächen eine ganz beliebige Lage besitzt, sie also z. B. auch als die Coordinaten desjenigen Punctes betrachten, in welchem diese Trajectorie die gegebene Kugelfläche durchschneidet. Ebenso verhält es sich mit ϑ_x und φ_x. Wir können demnach sagen, dass in den vorstehenden Formeln drei Puncte enthalten sind, welche sämmtlich auf derjenigen Kugelfläche (ds) liegen, über welche die Integration S sich ausdehnt, und dass von diesen Puncten zwei, nämlich 1 und x beliebige feste Lagen besitzen, während der dritte s den variablen Ort des Elementes ds vorstellt.

Es zeigt sich leicht, dass die durch die Formeln (163.) ausgesprochenen *Eigenschaften der Bessel'schen Function J* eine gewisse Analogie besitzen mit den früher (in 113.) gefundenen *Eigenschaften der Laplace'schen Function P.* In der That ergeben sich aus den für die letztere Function gefundenen Formeln (113.) sehr leicht durch Summation nach n die Gleichungen:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\mathrm{S}\, P_{s1}^{(n)}\, P_{sx}^{(p)}\psi_s^2\, ds\right) \qquad = \frac{4a^2.4\pi}{2p+1}\, P_{1x}^{(p)}$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\mathrm{S}\, P_{s1}^{(n)}\, P_{sx}^{(p)}\psi_s^2\, ds\right)(2n+1) = 4a^2.\,4\pi.\,P_{1x}^{(p)},$$

deren Analogie mit den Formeln (163.) ausser Zweifel steht.

B. c. Die Function E lässt sich als ein Potential darstellen.

Mit der Kenntniss dieser Eigenschaften der Bessel'schen Transcendenten J ausgerüstet, nehmen wir nun die Untersuchung unserer Functionen

$$(164.) \qquad \overset{\varepsilon}{E}(\lambda,\, \vartheta,\, \varphi) = e^{\varepsilon p\lambda}.\sqrt{\psi}\, J_{0x}^{(p)}, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

(141.) wieder auf. Wir construiren irgend eine den Pol ($\lambda = \varepsilon\infty$) umschliessende Kugelfläche mit dem Parameter $\lambda = \lambda_s$, und stellen uns die Aufgabe, die Werthe der Function $\overset{\varepsilon}{E}$ für sämmtliche Puncte (λ, ϑ, φ) zu untersuchen, welche *ausserhalb* dieser Kugelfläche liegen, mögen dieselben nun in der Endlichkeit oder in unendlicher Ferne liegen. Was

die λ-Coordinaten dieser Puncte anbelangt, so sind dieselben, falls $\varepsilon = +1$ ist, sämmtlich der Relation

$$\varepsilon\infty > \lambda_s > \lambda \qquad (\varepsilon = +1)$$

und, falls $\varepsilon = -1$ ist, sämmtlich der Relation

$$\varepsilon\infty < \lambda_s < \lambda \qquad (\varepsilon = -1)$$

unterworfen. In beiden Fällen ist demnach der Ausdruck:

$$(165.) \qquad \varepsilon(\lambda_s - \lambda) = \text{pos.},$$

welche Lage der Punct $(\lambda, \vartheta, \varphi)$ ausserhalb der construirten Kugel $(\lambda = \lambda_s)$ auch immer haben mag.

Die Kugelfläche $(\lambda = \lambda_s)$ werde nun mit Masse belegt gedacht, und zwar der Art, dass das auf irgend einem Element ds derselben angehäufte Quantum von Masse gleich

$$C\psi_s\sqrt{\psi_s}\,J_{s\varkappa}^{(p)}\,ds$$

ist, wo C irgend welche Constante vorstellen soll. Bezeichnet man die reciproke Entfernung zwischen ds und dem Puncte $(\lambda, \vartheta, \varphi)$ mit T_{so}, so wird *das Potential jener Belegung auf diesen Punct gleich*

$$C\int\!\!\!\int \psi_s\sqrt{\psi_s}\,J_{s\varkappa}^{(p)}\,T_{so}\,ds$$

sein, und T_{so} selber (nach 140. und mit Berücksichtigung von 165.) folgenden Werth besitzen:

$$T_{so} = \sqrt{\psi_s}\sqrt{\psi}\int_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\varepsilon(\lambda_s-\lambda)}\,.\,J_{os}^{(n)}\,dn\,.$$

Durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich jenes Potential in:

$$C.\sqrt{\psi}\int_{n=0}^{n=\infty}\left(\int\!\!\!\int J_{so}^{(n)}\,J_{s\varkappa}^{(p)}\,\psi_s^2\,ds\right)e^{-n\varepsilon(\lambda_s-\lambda)}\,.\,dn\,.$$

Auf diesen Ausdruck kann man die Formel (163. a.) sofort anwenden; weil die Differenz $\lambda_s - \lambda$, wie es zur Gültigkeit jener Formel erforderlich ist, nach (165.) einen positiven Werth hat. Durch jene Formel verwandelt sich daher das genannte Potential in:

$$C\sqrt{\psi}\,.\,\frac{2\pi}{p}\,.\,e^{-p\varepsilon(\lambda_s-\lambda)}\,.\,J_{o\varkappa}^{(p)},$$

oder, wenn man die Constante C dem Parameter λ_s der construirten Kugelfläche der Art entsprechen lässt, dass der Ausdruck

$$C.\frac{2\pi}{p}.\,e^{-p\varepsilon\lambda_s}$$

gerade = 1 wird, in:

$$e^{\varepsilon p\lambda}.\sqrt{\psi}.\,J_{ox}^{(p)}$$

d. i. in die zu untersuchende Function $\overset{\varepsilon}{\overline{E}}$ (164.).

Somit sind wir zu folgendem Satz gelangt:

(**166.**) *Die Function* $\overset{\varepsilon}{\overline{E}}(\lambda, \vartheta, \varphi)$ (141.) *stellt das Potential derjenigen Wirkung vor, welche eine beliebig gewählte, den Pol* ($\lambda = \varepsilon\infty$) *umschliessende und in geeigneter Weise mit Masse belegte Kugelfläche auf den variablen Punct* (λ, ϑ, φ) *ausübt, vorausgesetzt, dass dieser Punct stets ausserhalb der Kugelfläche bleibt.*

Denkt man sich diese Kugelfläche der Art gewählt, dass sie den Pol unendlich enge umschliesset, so ergiebt sich hieraus sofort:

(**167.**) *Die Function* $\overset{\varepsilon}{\overline{E}}(\lambda, \vartheta, \varphi)$ *stellt das Potential derjenigen Wirkung vor, welches die mit dem Namen „Pol" bezeichnete, unendlich kleine Kugel* ($\lambda = \varepsilon\infty$) *bei geeigneter Massenbelegung auf den variablen Punct* (λ, ϑ, φ) *ausübt; und erfüllt daher, mit alleiniger Ausnahme dieser unendlich kleinen Kugel, im ganzen unendlichen Raume überall die Haupt-Bedingungen* (10.).

C. Temperaturbestimmung des Körpers.

Um das Problem des stationären Temperaturzustandes für den Körper, mit welchem wir es in diesem §. zu thun haben, zu lösen, werden wir uns der in (91.), (92.) auseinandergesetzten allgemeinen Methode bedienen, also mit der Berechnung der Green'schen Function beginnen.

Wenn wir in der Function (141.)

$$(\mathbf{168.})\qquad \overset{\varepsilon}{\overline{E}}(\lambda, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\psi}\,e^{\varepsilon n\lambda}.\,J_{ox}^{(n)} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

ϑ_x und φ_x als die Coordinaten eines *festen*, übrigens irgendwo im Raume gelegenen Punctes x ansehen, mithin diese Grössen — wie das bei

Behandlung der Function E stets geschah — als zwei willkührliche *Constanten* betrachten, so wird diese dann allein von der Lage des variablen Punctes $(\lambda, \vartheta, \varphi)$ abhängende Function allenthalben, mit Ausnahme der beiden unendlich kleinen Kugeln, welche wir die „Pole" nennen, den Haupt-Bedingungen Genüge leisten (167.); sie wird also, da jene beiden unendlich kleinen Kugeln stets *ausserhalb* des gegebenen Körpers liegen (135.), diesen Bedingungen im *Innern* des Körpers an allen Orten Genüge leisten. Solches wird von jeder der unendlich vielen Functionen $\overset{+}{E}$ und $\overset{-}{E}$ gelten, welche aus (168.) dadurch entspringen, dass man für ε bald $+1$ bald -1, und für n successive beliebige Constanten setzt. Solches wird demnach also auch gelten für irgend ein aus diesen Functionen mit Zuziehung irgend welcher constanten Factoren A_n, B_n zusammengesetztes lineäres Aggregat

$$(169.)\qquad G_0 = \sqrt{\psi}\sum\left(A_n e^{n\lambda} + B_n e^{-n\lambda}\right) J^{(n)}_{0x}.$$

Dieses Aggregat wird daher (nach 91.) die in Bezug auf irgend welchen im Innern des Körpers angenommenen Centralpunct 1 sich beziehende Green'sche Function darstellen, sobald es gelingt, die Constanten A_n, B_n und die in J enthaltenen Constanten ϑ_x, φ_x der Art zu bestimmen, dass dasselbe, sobald der variable Punct $(\lambda, \vartheta, \varphi)$ in irgend eine Stelle der Begrenzung des Körpers zu liegen kommt, stets gleichwerthig wird mit der reciproken Entfernung zwischen dieser Stelle und jenem Centralpunct 1. Versteht man unter ds und $d\sigma$ die Elemente der beiden den Körper begrenzenden Kugelflächen, ferner unter s und σ die variablen Orte dieser Elemente, und bezeichnet man wie früher die reciproke Entfernung zwischen irgend zwei Orten α und β mit $T_{\alpha\beta}$, so lässt sich die soeben an G_0 gestellte Anforderung durch die beiden Formeln

$$(170.)\qquad G_\sigma = T_{\sigma 1}, \qquad G_s = T_{s1}$$

aussprechen.

Für die reciproke Entfernung zwischen dem variablen Puncte 0 mit den Coordinaten $(\lambda, \vartheta, \varphi)$ und zwischen dem festen Centralpunct 1 mit den Coordinaten $(\lambda_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ erhält man (aus 140.) je nachdem $\lambda < \lambda_1$ oder $\lambda > \lambda_1$ ist, folgende Werthe:

$$(\mathbf{170.}\,\alpha.)\quad T_{01} = \sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}\int_{n=0}^{n=\infty} e^{n(\lambda-\lambda_1)} J_{01}^{(n)}\, dn \qquad (\lambda < \lambda_1)$$

$$(\mathbf{170.}\,\beta.)\quad T_{01} = \sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}\int_{n=0}^{n=\infty} e^{n(\lambda_1-\lambda)} J_{01}^{(n)}\, dn \qquad (\lambda > \lambda_1).$$

Bezeichnet man nun die Parameter der beiden den Körper begrenzenden Kugelflächen mit $\lambda = \tau$ und $\lambda = t$, und setzt man fest, dass $\tau < t$ sein solle, wo dann auch

$$\tau < \lambda_1 < t$$

sein wird, und bezeichnet man endlich die ϑ- und φ-Coordinaten der Puncte σ und s mit ϑ_σ, φ_σ und ϑ_s, φ_s, so wird man den Ausdruck für $T_{\sigma 1}$ erhalten, sobald man in (α.) λ, ϑ, φ mit τ, ϑ_σ, φ_σ, und andererseits den Ausdruck für T_{s1} erhalten, sobald man in (β.) λ, ϑ, φ mit t, ϑ_s, φ_s vertauscht. Um nun das Aggregat G_0, wie es in (170.) verlangt wird, für die Puncte σ und s respective mit den eben bezeichneten Ausdrücken gleichwerthig zu machen, ist es zunächst nothwendig, jenes Aggregat in ein Aggregat aus unendlich vielen und unendlich kleinen Gliedern, nämlich in ein bestimmtes Integral umzuwandeln, also an Stelle von (169.) zu setzen:

$$(\mathbf{171.})\quad G_0 = C\sqrt{\psi}\int_0^\infty (A_n e^{n\lambda} + B_n e^{-n\lambda})\, J_{0x}^{(n)}\, dn,$$

wo C einen noch ausserdem zugefügten constanten Factor vorstellen soll. Nunmehr wird die in (170.) geforderte Uebereinstimmung sofort herbeigeführt, wenn man den noch willkührlichen festen Punct x mit dem Centralpunct 1 zusammenfallen lässt, ferner C gleich der dem Centralpunct 1 zugehörigen Constanten $\sqrt{\psi_1}$ setzt, und ausserdem die Constanten A_n, B_n der Art bestimmt, dass sie den Relationen

$$A_n e^{n\tau} + B_n e^{-n\tau} = e^{n(\tau-\lambda_1)}$$

$$A_n e^{nt} + B_n e^{-nt} = e^{n(\lambda_1-t)}$$

Genüge leisten. Demnach ergiebt sich schliesslich für die dem Centralpunct 1 angehörige und daher mit $G^{(1)}$ zu bezeichnende Green'sche Function folgender Werth:

$$(172.)\qquad G_0^{(1)} = \sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}\int_0^\infty (A_n e^{n\lambda} + B_n e^{-n\lambda})\, J_{01}^{(n)}\, dn\,,$$

wo

$$A_n = e^{-nt}\frac{e^{n(\lambda_1-\tau)} - e^{n(\tau-\lambda_1)}}{e^{n(t-\tau)} - e^{n(\tau-t)}}\,,\qquad B_n = e^{n\tau}\frac{e^{n(t-\lambda_1)} - e^{n(\lambda_1-t)}}{e^{n(t-\tau)} - e^{n(\tau-t)}}$$

ist.

Nunmehr wird die Temperatur V_1, welche der gegebene Körper nach Eintritt des stationären Zustandes im Puncte 1 besitzt (zufolge 92.) durch Anwendung der Formel

$$4\pi V_1 = \mathbf{S} H_\sigma^{(1)} V_\sigma d\sigma + \mathbf{S} H_s^{(1)} V_s ds$$

erhalten. Die hier vorkommenden H sind aus der eben gefundenen Green'schen Function in folgender Weise abzuleiten:

$$H_\sigma^{(1)} = \frac{dG_\sigma^{(1)}}{d\mathfrak{N}} - \frac{dT_{1\sigma}}{d\mathfrak{N}}\qquad H_s^{(1)} = \frac{dG_s^{(1)}}{dN} - \frac{dT_{1s}}{dN}\,,$$

wo unter $\mathfrak{N}$ und N diejenigen Richtungen der auf $d\sigma$ und ds errichteten Normalen zu verstehen sind, welche aus dem Körper in den angrenzenden Raum hineinlaufen. Beachtet man die zwischen τ und t festgesetzte Beziehung $\tau < t$, so ergiebt sich sofort, dass $\frac{d\tau}{d\mathfrak{N}}$ negativ und $\frac{dt}{dN}$ positiv ist, und dass daher diese Differential-Quotienten (nach 88. e.) folgende Werthe besitzen müssen:

$$\frac{d\tau}{d\mathfrak{N}} = -\psi_\sigma\,,\qquad \frac{dt}{dN} = +\psi_s\,.$$

Man erhält daher für die H:

$$H_\sigma^{(1)} = -\psi_\sigma\frac{\partial(G_\sigma^{(1)} - T_{1\sigma})}{\partial\tau}\,,\qquad H_s^{(1)} = +\psi_s\frac{\partial(G_s^{(1)} - T_{s1})}{\partial t}\,.$$

Und daraus ergiebt sich dann schliesslich durch Substitution des für G gefundenen Werthes (172.) und durch gleichzeitige Substitution des Werthes von T (170.):

$$(173.)\quad\begin{cases} H_\sigma^{(1)} = 2\psi_\sigma\sqrt{\psi_\sigma}\sqrt{\psi_1}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{n(t-\lambda_1)} - e^{n(\lambda_1-t)}}{e^{n(t-\tau)} - e^{n(\tau-t)}}\, J_{1\sigma}^{(n)}\, n\, dn \\ H_s^{(1)} = 2\psi_s\sqrt{\psi_s}\sqrt{\psi_1}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{n(\tau-\lambda_1)} - e^{n(\lambda_1-\tau)}}{e^{n(\tau-t)} - e^{n(t-\tau)}}\, J_{1s}^{(n)}\, n\, dn. \end{cases}$$

Dass diese Darstellung (173.), wenn der Punct $(\lambda_1, s_1, \varphi_1)$ *im Innern* des Körpers liegt, mithin

$$\tau < \lambda_1 < t$$

ist, immer Gültigkeit hat, lässt sich leicht darthun. Das in $H_\sigma^{(1)}$ vorhandene Integral z. B. besitzt folgende Gestalt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{n(\tau-\lambda_1)} - e^{n(\lambda_1+\tau-2t)}}{1-e^{2n(\tau-t)}} \,.\, J_{1\sigma}^{(n)} \, n \, dn,$$

d. i.

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^n - \beta^n}{1-\gamma^n} \, J_{1\sigma}^{(n)} \, n \, dn,$$

wo α, β, γ (der Relation $\tau < \lambda_1 < t$ zufolge) ächte Brüche sind. Setzt man die (positive) Grösse $\sqrt{s_\sigma + s_1^2 - 2s_\sigma s_1 \cos(\varphi_\sigma - \varphi_1)}$ zur Abkürzung $= A$, so verwandelt sich dieses Integral in:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^n - \beta^n}{1-\gamma^n} \, J(An) \,.\, n \, dn,$$

oder, wenn man statt n die Grösse $An = \eta$ als Integrations-Argument einführt, in:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{\frac{\eta}{A}} - \beta^{\frac{\eta}{A}}}{1-\gamma^{\frac{\eta}{A}}} \,.\, \frac{\eta}{A^2} \,.\, J(\eta) \, d\eta.$$

Dass dieses Integral aber einen *bestimmten endlichen* Werth besitzt, ergiebt sich leicht aus (5.). — In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass auch die Darstellung (172.) für die Green'sche Function $G_0^{(1)}$ stets gültig sein muss, sobald die Puncte (λ, s, φ) und $(\lambda_1, s_1, \varphi_1)$ beide *im Innern* des Körpers liegen.

Wir sind somit zu folgendem Resultat gelangt:

Resultat. *Werden die beiden einander berührenden Kugelflächen* $(d\sigma)$ *und* (ds), *von welchen der gegebene Körper begrenzt ist, in beliebig gegebenen und unveränderlichen Temperaturen* V_σ *und* V_s *erhalten, so wird nach Eintritt des stationären Zustandes die Temperatur* V_1 *in irgend einem Puncte* 1 *des Körpers folgenden Werth haben:*

$$(174.)\qquad 4\pi V_1 = \mathop{\mathrm{S}} V_\sigma H_\sigma^{(1)} \, d\sigma + \mathop{\mathrm{S}} V_s H_s^{(1)} \, ds,$$

wo die Integrationen über alle Elemente der einen und der andern Begrenzungsfläche ausgedehnt sind, und wo die H *die in* (173.) *angegebenen,*

von den Coordinaten $(\lambda_1, s_1, \varphi_1)$ *des Punctes* 1 *und gleichzeitig von den Coordinaten* $(\tau, s_\sigma, \varphi_\sigma)$, (t, s_s, φ_s) *der Elemente* $d\sigma$, ds *abhängigen Werthe vorstellen. Von den beiden Functionen* ψ *und* J, *welche in den* H *vorkommen, hat die erstere die Bedeutung*

$$\psi_\alpha = \lambda_\alpha^2 + s_\alpha^2,$$

während die letztere die Bessel'sche Function

$$J_{\alpha\beta}^{(n)} = J\left(n\sqrt{s_\alpha^2 + s_\beta^2 - 2s_\alpha s_\beta \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)}\right)$$

darstellt.

Bemerkung. Für den besondern Fall, dass die gegebene Temperatur der einen Begrenzungsfläche ($d\sigma$) allenthalben dieselbe, $= \Gamma$, und die der andern Begrenzungsfläche (ds) ebenfalls überall gleich gross, $= C$ ist, verwandelt sich die Formel (174.) in

$$4\pi V_1 = \Gamma \int H_\sigma^{(1)} d\sigma + C \int H_s^{(1)} ds.$$

Dieser Werth für V_1 lässt sich durch Ausführung der Quadraturen $\int H_\sigma^{(1)} d\sigma$ und $\int H_s^{(1)} ds$ weiter entwickeln. Zufolge (74.) ist

$$\frac{\psi_\sigma^2}{\sqrt{\psi_\sigma}} = \frac{\psi_\sigma^2}{\sqrt{\tau^2 + s_\sigma^2}} = \psi_\sigma^2 \int_0^\infty e^{-p\bar{\tau}} . J(ps_\sigma)\, dp$$

wo $\bar{\tau}$ den *absoluten* Werth von τ vorstellt. Beachtet man, dass

$$J(ps_\sigma) = J\left(p\sqrt{s_\sigma^2 + s_0^2 - 2s_\sigma s_0 \cos(\varphi_\sigma - \varphi_0)}\right) = J_{\sigma 0}^{(p)}$$

wird, sobald man unter s_0 und φ_0 zwei Grössen versteht, welche beide gleich *Null* sind; so verwandelt sich diese Formel in

$$\psi_\sigma \sqrt{\psi_\sigma} = \psi_\sigma^2 \int_0^\infty e^{-p\bar{\tau}} . J_{\sigma 0}^{(p)}\, dp.$$

Substituirt man nun diesen Werth an Stelle von $\psi_\sigma \sqrt{\psi_\sigma}$ in $H_\sigma^{(1)}$ (173), so ergiebt sich:

$$\int H_\sigma^{(1)} d\sigma = 2\sqrt{\psi_1} \int_0^\infty \frac{e^{n(t-\lambda_1)} - e^{n(\lambda_1 - t)}}{e^{n(t-\tau)} - e^{n(\tau - t)}}\, Q\, n\, dn.$$

Hier stellt Q folgenden Ausdruck vor:

$$Q = \int_0^\infty \left(\int J_{\sigma 1}^{(n)} J_{\sigma 0}^{(p)} \psi_\sigma^2 d\sigma\right) e^{-p\bar{\tau}}\, dp$$

d. i. nach (163. a.)

$$Q = \frac{2\pi}{n} e^{-n\tau} J_{10}^{(n)} = \frac{2\pi}{n} e^{-n\tau} J\left(n\sqrt{s_1^2 + s_0^2 - 2 s_1 s_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)}\right)$$

oder, da s_0 und φ_0 Null sind:

$$Q = \frac{2\pi}{n} e^{-n\tau} J(n s_1).$$

Demnach wird:

$$\mathsf{S} H_\sigma^{(1)} d\sigma = 4\pi\sqrt{\psi_1} \int_0^\infty \frac{e^{n(t-\lambda_1)} - e^{n(\lambda_1 - t)}}{e^{n(t-\tau)} - e^{n(\tau - t)}} e^{-n\tau} J(n s_1)\, dn.$$

Ein ganz ähnlicher Werth ergiebt sich für $\mathsf{S} H_s^{(1)} ds$; und man erhält daher schliesslich:

$$V_1 = \sqrt{\psi_1} \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \dfrac{e^{n(t-\lambda_1)} - e^{n(\lambda_1 - t)}}{e^{n(t-\tau)} - e^{n(\tau - t)}} e^{-n\tau} \\ + C \dfrac{e^{n(\tau-\lambda_1)} - e^{n(\lambda_1 - \tau)}}{e^{n(\tau-t)} - e^{n(t - \tau)}} e^{-nt} \end{array} \right\} . J(n s_1)\, dn.$$

Die früher in (75.) gefundene Formel ist ein specieller Fall der vorstehenden, und lässt sich aus dieser leicht ableiten.

Die Gleichung $V_1 = \text{Const.}$ repräsentirt die *isothermen Flächen*. Setzt man also den so eben für V_1 aufgestellten Werth gleich einer Constanten, so wird sich eine Gleichung zwischen λ_1 und s_1 ergeben, durch welche die isothermen Flächen oder vielmehr deren Durchschnitte mit einer Meridian-Ebene dargestellt werden.

§. 5. *Ueber die Darstellung willkührlich gegebener Functionen von zwei Argumenten durch ein dreifaches Integral, welches dem Fourier'schen Doppel-Integral für Functionen von einem Argumente analog ist.*

Die in dem letzten §. dargelegte Methode lässt sich auch leicht in Anwendung bringen, um den stationären Temperatur-Zustand eines Körpers zu bestimmen, der von einer *einzigen* Kugelfläche begrenzt wird. Der Parameter λ dieser Fläche mag $= \tau$ und die Fläche so gewählt sein, dass sie den Pol ($\lambda = -\infty$) umschliesst. Bezeichnet man alsdann mit $G^{(1)}$ die Green'sche Function in Bezug auf irgend einen im Innern dieser Kugel gewählten Centralpunct (λ_1, s_1, φ_1) oder 1, und mit $G_0^{(1)}$ den Werth dieser Function im Puncte (λ, s, φ) oder 0, so findet man:

$$G_0^{(1)} = \sqrt{\psi_0}\sqrt{\psi_1} \int_0^\infty e^{n(\lambda + \lambda_1 - 2\tau)} J_{01}^{(n)}\, dn.$$

Hieraus ergiebt sich, falls man unter (λ, s, φ) oder 0 einen beliebigen Punct auf der Oberfläche der Kugel versteht, für den Ausdruck

$$H_0^{(1)} = \frac{dG_0^{(1)}}{dN} - \frac{dT_{01}}{dN}$$

folgender Werth:

$$H_0^{(1)} = 2\psi_0 \sqrt{\psi_0}\sqrt{\psi_1} \int_0^\infty e^{n(\lambda_1 - \lambda)} J_{10}^{(n)} n \, dn.$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes lässt sich dann die nach Eintritt des stationären Zustandes in 1 vorhandene Temperatur V_1 folgendermassen darstellen:

$$4\pi V_1 = \mathsf{S} V_0 H_0^{(1)} d\sigma,$$

wo die Integration über alle Elemente $d\sigma$ der Kugelfläche ausgedehnt ist, und V_0 die für $d\sigma$ gegebene Temperatur vorstellt. Also:

Ist λ der Parameter der gegebenen Kugelfläche, und sind ferner λ, s, φ und λ_1, s_1, φ_1 die Coordinaten zweier Puncte 0 und 1, von denen der erstere an der Oberfläche, der letztere irgendwo im Innern der Kugel liegt, so hat die nach Eintritt des stationären Zustandes in 1 vorhandene Temperatur V_1 folgenden Werth:

$$(175.) \quad 2\pi V_1 = \sqrt{\psi_1} \int_0^\infty \left(\mathsf{S} V_0 J_{10}^{(n)} \psi_0 \sqrt{\psi_0} \, d\sigma \right) e^{n(\lambda_1 - \lambda)} n \, dn.$$

Hier ist: $\psi_0 = \lambda^2 + s^2, \qquad \psi_1 = \lambda_1^2 + s_1^2,$

$$J_{10}^{(n)} = J\left(n\sqrt{s^2 + s_1^2 - 2 s s_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}\right).$$

Ferner bedeutet $d\sigma$ das bei (λ, s, φ) liegende Element der Kugelfläche, V_0 die für dasselbe gegebene Temperatur und S die über alle Elemente $d\sigma$ der Kugelfläche ausgedehnte Integration.

Die für die Oberfläche der Kugel gegebene Temperatur V_0 wird irgend eine Function der beiden Coordinaten s, φ sein, und mag als solche mit $F(s, \varphi)$ bezeichnet werden. Die Formel (175.), welche die Temperatur V_1 im Innern der Kugel vorstellt, muss nun offenbar den für die Oberfläche gegebenen Werth liefern, sobald man den innern Punct 1 in die Oberfläche fallen lässt; muss also für V_1 den Werth $F(s_1, \varphi_1)$

geben, sobald man von den Coordinaten λ_1, s_1, φ_1 jenes Punctes die erste in λ übergehen lässt. Demnach ergiebt sich

$$2\pi . F(s_1, \varphi_1) = \sqrt{\psi_1}\int_0^\infty \left(\mathsf{S} F(s, \varphi) . J_{10}^{(n)} \psi_0 \sqrt{\psi_0}\, d\sigma \right) n\, dn,$$

wo gegenwärtig $\psi_0 = \lambda^2 + s^2$, $\psi_1 = \lambda^2 + s_1^2$ ist, und $J_{10}^{(n)}$ denselben Werth wie früher besitzt. Beachtet man, dass das Element $d\sigma$ der Kugelfläche (nach 88. e.) $= \frac{s\, ds\, d\varphi}{\psi_0^2}$ ist, und beachtet man ferner, dass das Zeichen S zwei Integrationen umfasst, von denen die eine (man sehe 136.) von $s = 0$ bis $s = \infty$, die andere von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ sich erstreckt, so verwandelt sich diese Formel in:

$$2\pi \frac{F(s_1, \varphi_1)}{\sqrt{\lambda^2 + s_1^2}} =$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int \frac{F(s, \varphi)}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}} J\left(n\sqrt{s^2 + s_1^2 - 2 s s_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}\right) d\varphi . s\, ds . n\, dn$$

oder, wenn man die mit der willkührlichen Constanten λ behaftete Function

$$\frac{F(s, \varphi)}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}} = f(s, \varphi)$$

setzt:

(176.) $$2\pi f(s_1, \varphi_1) =$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int f(s, \varphi) . J\left(n\sqrt{s^2 + s_1^2 - 2 s s_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}\right) . d\varphi . s\, ds . n\, dn.$$

Die Integration erstreckt sich hier von $\begin{cases} \varphi = 0 \text{ bis } \varphi = 2\pi, \\ s = 0 \text{ bis } s = +\infty, \\ n = 0 \text{ bis } n = +\infty. \end{cases}$

Die Methode, durch welche ich diese Formel so eben abgeleitet habe, ist nicht vollständig strenge. Dass die Gleichung (175.) richtig ist, sobald $\lambda_1 < \lambda$, unterliegt allerdings keinem Zweifel, dass jene Gleichung aber auch dann noch gültig bleibt, wenn man darin, wie es hier bei Ableitung der Formel (176.) geschehen ist, $\lambda_1 = \lambda$ setzt, würde noch eines Beweises bedürfen, den ich einstweilen nicht zu liefern im Stande bin.

Gewisse Analogien lassen mich indessen vermuthen, dass diese Formel stets gültig ist, sobald die willkührliche Function $f(s, \varphi)$ innerhalb

der Integrations-Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, $s = 0$ bis $s = \infty$ allenthalben endlich bleibt.

Es steht nämlich diese Formel (176.) *zu derjenigen, welche Fourier für eine Function* $f(s)$, *die nur von* *einem* *Argumente abhängt, gegeben hat*, d. i. zu der Formel

$$(177.)\quad \pi.f(s_1) = \iint f(s).\cos n(s - s_1)\,ds\,dn$$

die Integrationen ausgedehnt von $\begin{cases} s = -\infty \text{ bis } s = +\infty \\ n = 0 \quad\ \text{ bis } n = +\infty \end{cases}$

in demselben Verhältniss, in welcher die Laplace'sche Entwickelung nach Kugelfunctionen zu der Fourier'schen Entwickelung nach Kreisfunctionen steht.

Dass solches in der That der Fall ist, wird aus folgenden Angaben erhellen. Dem Problem des stationären Temperaturzustandes einer homogenen *Kugel* lässt sich in analytischer Beziehung ein analoges, auf einen *Kreis* sich beziehendes Problem zur Seite stellen, welches so lautet:

(178.) Es soll eine Function $V(x, y)$ ermittelt werden, welche sammt ihren Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ innerhalb des Kreises überall stetig ist, welche ferner innerhalb des Kreises allenthalben der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ genügt, und welche endlich am Rande des Kreises beliebig gegebene Werthe besitzt.

Beide Probleme können auf doppelte Weise behandelt werden. Das auf die Kugel bezügliche kann nämlich, wie in dieser Abhandlung dargethan ist, entweder durch Anwendung der Coordinaten ϑ, ω, φ (pag. 112) oder durch Anwendung der Coordinaten λ, s, φ (pag. 148) gelöst werden. Im erstern Falle gelangt man zu der Laplace'schen Entwickelung willkührlich gegebener Functionen von *zwei* Argumenten nach *Kugelfunctionen*, im letztern Falle zu der Darstellung solcher Functionen durch das in (176.) angegebene *dreifache Integral.*

Dem analog lässt sich nun andererseits auch das so eben angegebene auf den Kreis sich beziehende Problem in doppelter Art behandeln, nämlich entweder mit Hülfe der Coordinaten ϑ, ω oder mit Hülfe der Coordinaten λ, s. Im erstern Fall gelangt man dann zu der Fourier'schen Ent-

wickelung willkührlich gegebener Functionen von *einem* Argument nach *Kreisfunctionen*, im letztern Fall zu der Darstellung solcher Functionen durch ein Fourier'sches *zweifaches Integral.*

Wie man in dieser Weise zu der Entwickelung nach Kreisfunctionen gelangen kann, werde ich hier nicht näher angeben, hingegen kurz andeuten, wie man dadurch zu dem Fourier'schen Doppel-Integrale (177.) gelangt. Bezeichnet V eine Function, welche den in (178.) angegebenen Bedingungen Genüge leistet und beliebig gegebene Randwerthe besitzt; bezeichnet ferner G eine Function, welche jenen Bedingungen ebenfalls Genüge leistet, und deren Randwerthe gleich den Logarithmen derjenigen Radien sind, welche von irgend einem im Innern der Kreisfläche liegendem festen Puncte 1 nach dem Rande hin gezogen sind; so lässt sich der Werth V_1, welchen die Function V in 1 besitzt, vermittelst ihrer Randwerthe und vermittelst der Function G in folgender Weise darstellen:

$$(179.)\qquad 2\pi V_1 = \int V_0\left(\frac{dL_{01}}{dN} - \frac{dG_0}{dN}\right) ds.$$

Hier ist unter 0 ein im Rand-Elemente ds liegender Punct zu verstehen, also unter G_0, V_0 die Werthe, welche V und G bei ds besitzen, ferner unter L_{01} der Logarithmus des von 1 nach 0 gezogenen Radius, endlich unter N die auf ds errichtete (aus der Kreisfläche in den umgrenzenden Raum laufende) Normale. Dabei erstreckt sich die Integration über alle Elemente ds des ganzen Randes. Es steht diese Formel mit den in (91. und 92.) aufgestellten in vollständiger Analogie, und lässt sich in derselben Weise wie jene ableiten.

Es mag nun das Coordinatensystem (λ, ϑ) zu Grunde gelegt und die Formel (179.) auf irgend einen Kreis mit dem Parameter λ bezogen werden, welcher so gewählt sein soll, dass er den Pol ($\lambda = -\infty$) umschliesst. Bezeichnen wir mit λ, ϑ die Coordinaten irgend eines Punctes 0, der auf dem Rande des Kreises liegt, und mit $d\lambda$, $d\vartheta$ die Zuwächse, welche einerseits λ, sobald dieser Punct auf der Normale N um dN, andererseits ϑ erleiden würde, sobald dieser Punct längs des Randes um ds fortrücken wollte; so ist nach (88. e.):

$$\frac{d\lambda}{dN} = \pm\psi, \qquad\qquad \frac{d\vartheta}{ds} = \pm\psi.$$

Da der Kreis den Pol ($\lambda = -\infty$) umschliesst, so wird λ in der Richtung (der nach Aussen hin laufenden) Normale N im Wachsen begriffen, also $\frac{d\lambda}{dN}$ = positiv sein. Setzen wir ausserdem fest, dass die Bogenlänge s in derjenigen Rich-

tung gerechnet werden soll, in welcher ϑ wächst, so wird $\frac{d\vartheta}{ds}$ ebenfalls positiv sein. Es wird daher:

$$\frac{d\lambda}{dN} = +\psi, \qquad \frac{d\vartheta}{ds} = +\psi,$$

folglich:

$$\frac{ds}{dN} = \frac{d\vartheta}{d\lambda}.$$

Beachtet man diese Relation, und beachtet man ferner, dass ϑ (wie sich aus 66. a. leicht ergiebt) von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen muss, damit der Randpunct (λ, ϑ) den ganzen Rand einmal durchläuft, so verwandelt sich die Formel (179.) in:

$$(179.\text{a.}) \qquad 2\pi V_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} V_0 \left(\frac{dL_{01}}{d\lambda} - \frac{dG_0}{d\lambda} \right) d\vartheta .$$

Diese Cleichung ist es, welche in ihrer weiteren Entwickelung zu der Fourier'schen Formel (177.) führt.

Für L_{01} ergiebt sich nämlich aus (88. c.) folgender Werth:

$$L_{01} = \log \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_1)^2 + (\vartheta - \vartheta_1)^2}{(\lambda^2 + \vartheta^2)(\lambda_1^2 + \vartheta_1^2)}},$$

wo λ_1, ϑ_1 die Coordinaten von 1 sind, ebenso wie λ, ϑ die von 0 vorstellen. Es lässt sich dieser Werth auch so darstellen:

(180.)

$$L_{01} = -\log \sqrt{\lambda_1^2 + \vartheta_1^2} + \tfrac{1}{2} \log \frac{(\lambda - \lambda_1) + i(\vartheta - \vartheta_1)}{-\lambda + i\vartheta} + \tfrac{1}{2} \log \frac{(\lambda - \lambda_1) - i(\vartheta - \vartheta_1)}{-\lambda - i\vartheta}$$

wo $\lambda - \lambda_1$ und $-\lambda$ *positive* Werthe besitzen; was sich leicht ergiebt, wenn man beachtet, dass der Kreis mit dem Parameter λ den Pol ($\lambda = -\infty$) umschliesst, und ferner beachtet, dass der Punct mit der Coordinate λ_1 *innerhalb* dieses Kreises liegt. Nun gilt bekanntlich, falls a, b irgend zwei Grössen mit *positiven* reellen Theilen sind, die Formel:

$$\log \frac{a}{b} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-bn} - e^{-an}}{n} dn.$$

Demgemäss wird

$$\log \frac{(\lambda - \lambda_1) + i(\vartheta - \vartheta_1)}{-\lambda + i\vartheta} = \int_0^{\infty} \frac{e^{n\lambda} . e^{-ni\vartheta} - e^{-n(\lambda - \lambda_1)} . e^{-ni(\vartheta - \vartheta_1)}}{n} dn$$

$$\log \frac{(\lambda - \lambda_1) - i(\vartheta - \vartheta_1)}{-\lambda - i\vartheta} = \int_0^{\infty} \frac{e^{n\lambda} . e^{+ni\vartheta} - e^{-n(\lambda - \lambda_1)} . e^{+ni(\vartheta - \vartheta_1)}}{n} dn.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (180.) ergiebt sich:

$$(181.)\quad L_{01} = -\log\sqrt{\lambda_1^2+s_1^2} + \int_0^\infty \frac{e^{n\lambda}\cos ns - e^{n(\lambda_1-\lambda)}\cos n(s-s_1)}{n}\,dn.$$

Um nunmehr die oben definirte Function G zu erhalten, muss zunächst bemerkt werden, dass die Ausdrücke

$$F = e^{n\lambda}\cos ns, \qquad F = e^{n\lambda}\sin ns,$$

wenn man dieselben als Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x, y des Punctes (λ, s) betrachtet, der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

Genüge leisten; ferner, dass diese Ausdrücke und ebenso auch die Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ innerhalb des Kreises allenthalben stetig sind. Demzufolge kann für die Function G folgender Ansatz gemacht werden:

$$(182.)\quad G_0 = C + \int_0^\infty \frac{(A\cos ns + B\sin ns)\,e^{n\lambda}}{n}\,dn,$$

wo C eine Constante, und A, B Functionen von n sind, die nunmehr so bestimmt werden müssen, dass G_0 mit L_{01} identisch wird, sobald der Punct 0 oder (λ, s) an irgend eine Stelle des Randes zu liegen kommt. Zu diesem Zweck ist, wie aus (181.) und (182.) sofort erhellt, nur erforderlich, dass

$$(183.)\quad \begin{cases} C = -\log\sqrt{\lambda_1^2+s_1^2} \\ A = 1 - e^{n(\lambda_1-2\lambda)}.\cos ns_1 \\ B = - e^{n(\lambda_1-2\lambda)}.\sin ns_1 \end{cases}$$

gesetzt wird, wo λ den Parameter des Kreises vorstellen soll.

Aus (181.) und (182.) ergiebt sich

$$\frac{dL_{01}}{d\lambda} - \frac{dG_0}{d\lambda} = \int_0^\infty \left(e^{n\lambda}\cos ns + e^{n(\lambda_1-\lambda)}.\cos n(s-s_1)\right)dn$$
$$- \int_0^\infty (A\cos ns + B\sin ns)\,e^{n\lambda}\,dn,$$

oder, wenn man die Werthe (183.) substituirt:

$$\frac{dL_{01}}{d\lambda} - \frac{dG_0}{d\lambda} = 2\int_0^\infty e^{n(\lambda_1-\lambda)}.\cos n(s-s_1).dn.$$

Und hierdurch verwandelt sich die Formel (179. a.) in:

$$\pi V_1 = \iint e^{n(\lambda_1 - \lambda)} \cdot V_0 \cos n(\vartheta - \vartheta_1)\, d\vartheta\, dn.$$

Bezeichnet man die gegebenen Randwerthe V_0 durch $f(\vartheta)$, so wird $V_1 = f(\vartheta_1)$ werden, sobald man den Punct (λ_1, ϑ_1) in irgend eine Stelle des Randes fallen, also $\lambda_1 = \lambda$ werden lässt. Demnach wird

$$\pi f(\vartheta_1) = \iint f(\vartheta) \cdot \cos n(\vartheta - \vartheta_1)\, d\vartheta\, dn,$$

wo sich die Integration erstreckt von $\begin{cases} \vartheta = -\infty \text{ bis } \vartheta = +\infty, \\ n = 0 \quad\ \text{ bis } n = \infty. \end{cases}$

Dieses aber ist die Fourier'sche Formel (177.).

Verbesserungen.

Pag. 2 ist der Inhalt der Zeilen 12—18 fehlerhaft. An Stelle derselben muss es heissen:

Und hieraus ergiebt sich sofort folgender Satz:

(A. b.) *Der Werth der Function* $\overset{(n)}{P}(x)$ *bleibt, so lange das (reell vorausgesetzte) Argument* x *zwischen* -1 *und* $+1$ *liegt, ebenfalls stets zwischen den Grenzen* -1 *und* $+1$.

Pag. 5 muss in der letzten Zeile LVI statt LXI gelesen werden.

Pag. 17 Zeile 5 von unten muss φ' statt φ stehen.

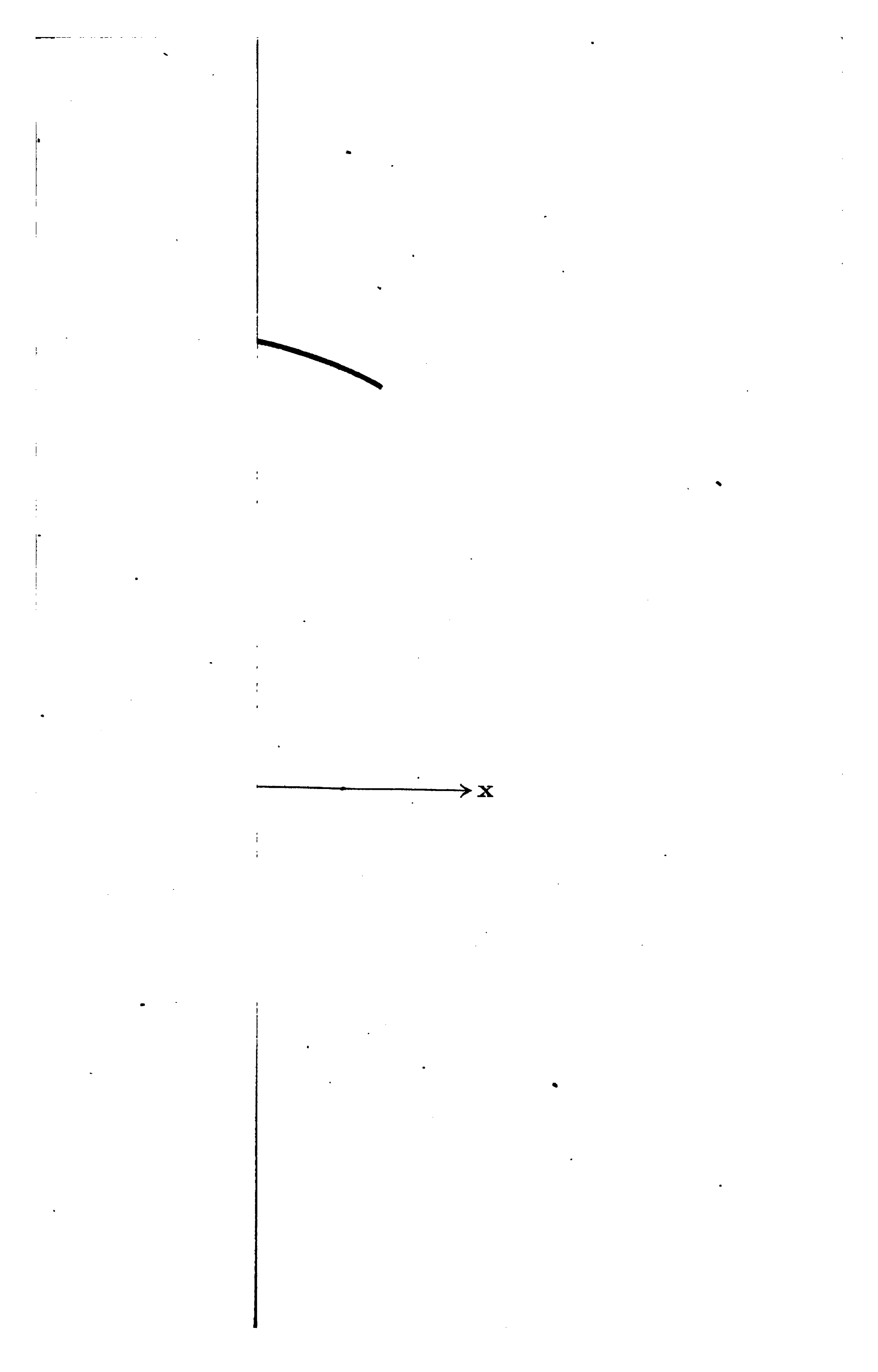
Pag. 49 Zeile 7 muss n statt ω stehen.

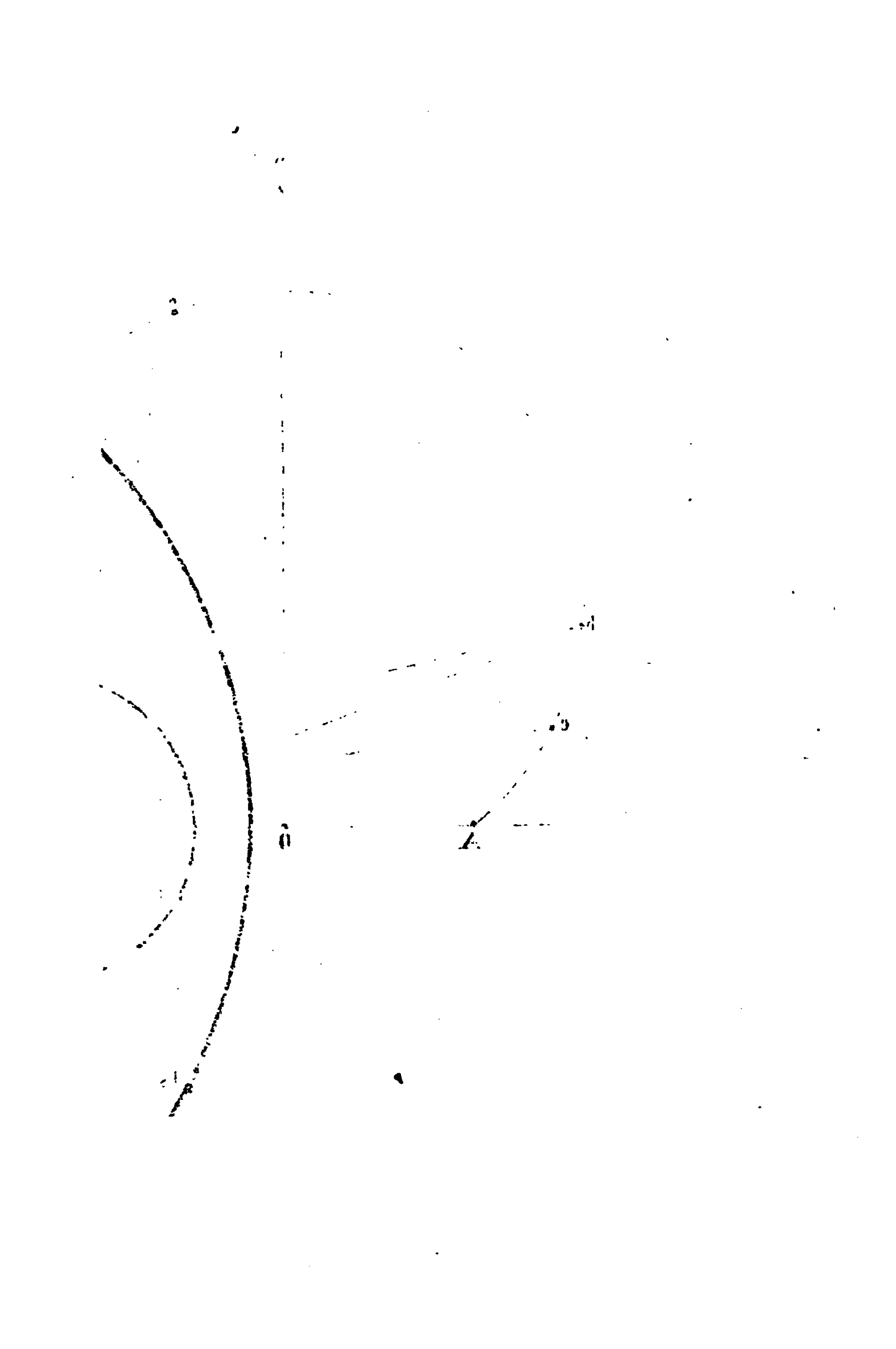
Pag. 64 Zeile 1 muss ϑ_b statt ϑ stehen.

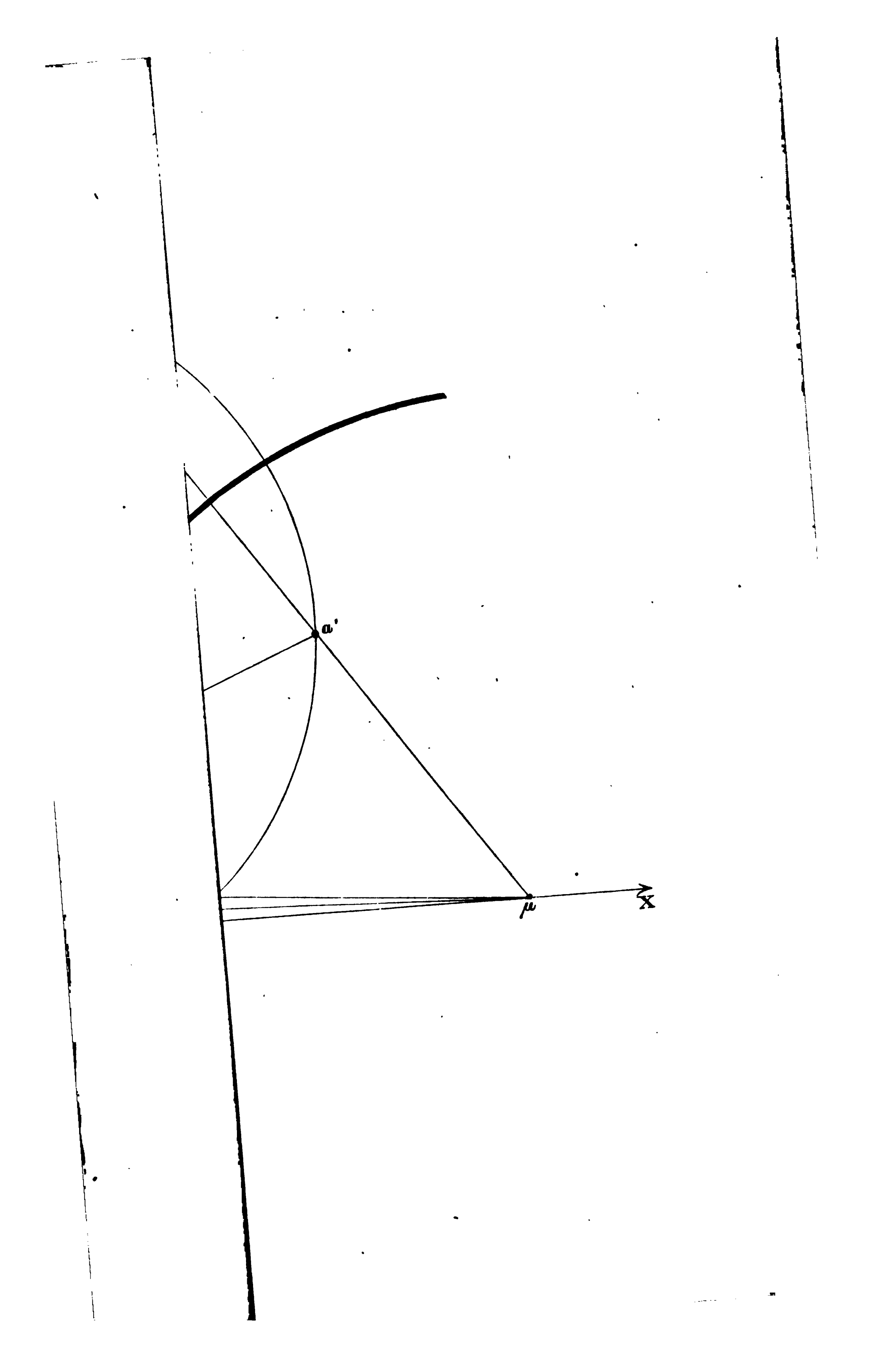
Pag. 111 muss in den beiden letzten Formeln

$$\sqrt{\psi_1}\sum_{n=0}^{n=\infty} \quad \text{statt} \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \quad \text{stehen.}$$

Pag. 127 Zeile 3 von unten muss λ statt ϑ stehen.


x





a'
μ
X





